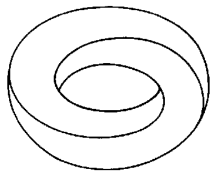
FRAKTALE I SAMOPODOBIEŃSTWO

Mariusz Gromada
marzec 2003
mariusz.gromada@wp.pl
http://multifraktal.net



1 Wstęp

Fraktalem nazywamy każdy zbiór, dla którego *wymiar Hausdorffa-Besicovitcha* (tzw. *wymiar fraktalny*) jest większy od *wymiaru topologicznego.*

Powyższą definicję sformułował Benoit Mandelbrot (wybitny matematyk polskiego pochodzenia, uważany za twórcę *geometrii fraktalnej*). Termin *fraktal* wywodzi się od łacińskiego słowa „fractus", co w dosłownym tłumaczeniu oznacza „częściowy". Wybór nazwy wiąże się z warunkiem dostatecznym na „posiadanie struktury fraktalnej", mówiącym o *niecałkowitości wymiaru fraktalnego dla rozważanego typu zbiorów* (definicja Hausdorffa opierała się jedynie na przytoczonym warunku dostatecznym)

Geometria fraktalna jest dziedziną matematyki badającą właściwości obiektów, wykazujących cechy struktur fraktalnych, w sytuacjach, gdy metody geometrii klasycznej „zawodzą". Wykorzystywana jest praktycznie w każdej dziedzinie nauki (*fizyka*, *informatyka*). Geometria fraktalna jest powiązana z *teorią chaosu.*

2 Typy fraktali

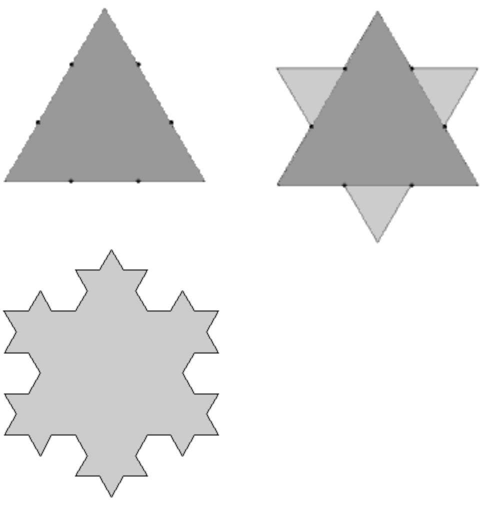
Wyróżnia się trzy główne typy fraktali:

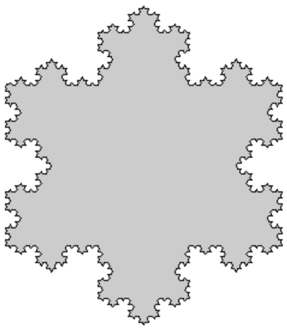
- *Systemy funkcji iterowanych* (ang. IFS - iterated function systems) - fraktale tworzone iteracyjnie, jako unie elementów rekurencyjnego ciągu zbiorów, poprzez kopiowanie „samego siebie". IFS wyróżniają się prostotą wizualizacji oraz bardzo ciekawymi własnościami. Przykłady: *zbiór Cantora*, *krzywa Kocha*, *dywan Sierpińskiego.*

- *Fraktale definiowane rekurencyjną zależnością punktów przestrzeni* (np. *płaszczyzny zespolonej*) - bardzo efektowne wizualizacje. Przykładem jest *zbiór Mandelbrota*.
- *Fraktale losowe* - generowane stochastycznie (np.: krajobrazy, linie brzegowe, mapy wysokościowe powierzchni).

3 Fraktale i samopodobieństwo

Fraktale cechuje bardzo ciekawa własność zwana *samopodobieństwem*. Powiększane w dowolnym miejscu ujawniają części łudząco podobne do wyjściowego zbioru. Chodzi o coś w rodzaju powtarzania kształtu w nieskończoność, niejako „w głąb”, w pewnej zamkniętej przestrzeni. Dla przykładu przedstawimy *krzywą Kocha*, której proces tworzenia polega na dzieleniu odcinka na trzy równe części, gdzie część środkową zastępuje się ząbkiem (trójkątem równobocznym bez podstawy). Powstaje w tym momencie odcinek złożony z czterech równych odcinków. Postępując tak w nieskończoność, każdemu uzyskanemu odcinkowi dodając ząbek, uzyskuje się krzywą zbudowaną z samych ząbków - trójkątów bez podstawy - o nieskończonej długości, lecz mieszczącą się w niewielkim obszarze. Krzywa w żadnym miejscu nie przecina się ze sobą i w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna.





Fraktale można również charakteryzować przez pewnego rodzaju „*nieregularność*” - jeżeli w płaskiej figurze geometrycznej (np. kwadracie) dwukrotnie powiększymy boki - jej powierzchnia wzrośnie czterokrotnie. Przeprowadzając takie operacje na fraktalu jego powierzchnia zwiększy się mniej niż czterokrotnie.

3.1 Typy samopodobieństwa

- *Samopodobieństwo dokładne* - wierne kopie jako odwzorowanie w skali (fraktale IFS).
- *Quasi-samopodobieństwo* - przybliżone kopie jako odwzorowanie w skali (często fraktale definiowane zależnością rekurencyjną punktów przestrzeni).
- *Samopodobieństwo statystyczne* - występujące przy fraktalach losowych.

4 Wymiar fraktalny

Wymiar fraktalny (nazywany czasami *wymiarem samopodobieństwa*) ma wiele definicji. Większość z nich opiera się na własności samopodobieństwa. Wyróżnia się również pojęcie *wymiaru Minkowskiego*. Fraktale, o ile dobrze „wyczuwalne” intuicyjnie, nie posiadają przejrzystego i jednoznacznego matematycznie określenia. Główne przyczyny takiej sytuacji to:

- istnieniem wielu różnych definicji wymiarów,
- istnieniem różnych typów samopodobieństwa,
- istnieniem fraktali, których nie można opisać rekurencyjną zależnością,
- brakiem precyzyjnego określenia „nieregularności”.

Poniżej podamy jedynie intuicyjną definicję wymiaru fraktalnego, dla szczególnych klas obiektów i przestrzeni (takich jak przestrzenie metryczne).

Rozpatrzmy dwie figury płaskie (osadzone w p-ni R^2), podobne w skali k_p, o polach P_1 i P_2. Można zapisać, że:

$$\frac{P_1}{P_2} = k_p^2$$

Uczyńmy to samo dla brył (osadzonych w p-ni R^3), podobnych w skali k_v, o objętościach V_1 i V_2. Zapisujemy analogicznie:

$$\frac{V_1}{V_2} = k_v^3$$

Określamy liczbę:

$$d_p = \log_{k_p} \frac{P_1}{P_2} = \log_{k_p} k_p^2 = 2$$

Liczbę d_p możemy wyznaczyć znając pola powierzchni figur podobnych. Nazwijmy ją *wymiarem podobieństwa* dwóch figur płaskich, podobnych o polach powierzchni P_1 i P_2. Dla dowolnych figur płaskich wymiar podobieństwa d_p jest zawsze równy 2 (figury osadzone są w p-ni $2 - wymiarowej$)

Podobnie dla brył podobnych osadzonych w p-ni R^3.

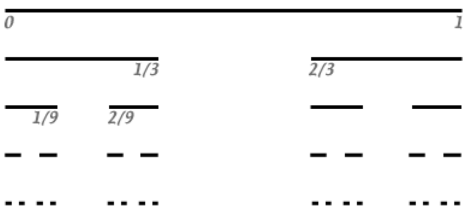
$$d_v = \log_{k_v} \frac{V_1}{V_2} = \log_{k_v} k_v^3 = 3$$

Liczbę d_v możemy wyznaczyć znając objętości brył podobnych. Nazwijmy ją *wymiarem podobieństwa* dwóch brył podobnych o objętościach V_1 i V_2. Dla dowolnych brył wymiar podobieństwa d_v jest równy 3 (bryły osadzone są w p-ni $3 - wymiarowej$.

Pojęcia zdefiniowane powyżej możemy w prosty sposób rozszerzyć na przypadek ogólny przestrzeni $n - wymiarowej$. W wyniku uzyskujemy nowe, specyficzne, lecz zgodne z intuicją określenie wymiaru.

Wymiar samopodobieństwa definiujemy jako *logarytm przy podstawie równej skali podobieństwa z liczby określającej „ile razy większa jest figura wyjściowa od figury podobnej”.*

Dla przykładu podajmy zbiór Cantora.



Łatwo zauważyć, że jest on podobny do swojej „połowy” w skali 3, ale długość tejże „połówki” jest 2 razy mniejsza od wyjściowego zbioru (na zbiór C składają się dwie takie części). Zatem:

$$d = \log_3 2 = 0,631\ldots$$

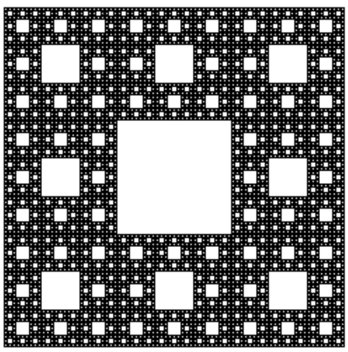
będzie wymiarem fraktalnym zbioru Cantora (*zbiór Cantora posiada zerowy wymiar topologiczny*)

Wymiar fraktalny niesie w sobie bardzo ważną informację - *pokazuje w jakim stopniu fraktal wypełnia przestrzeń, w której jest osadzony.*

Przykłady:

1. zbiór Cantora C jest osadzony w przestrzeni $1-$ *wymiarowej* i jego wymiar fraktalny $d = 0,631\ldots$

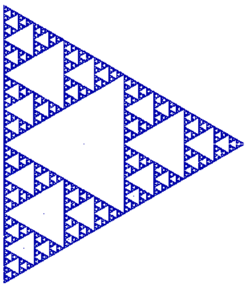
2. dywan Sierpińskiego jest osadzony w p-ni $2-$*wymiarowej* i jego wymiar fraktalny $d = 1,893\ldots$



5 Znane fraktale

5.1 Trójkąt Sierpińskiego

Rysujemy trójkąt równoboczny o ustalonej długości boku (np. 1). Środki boków trójkąta łączymy odcinkami otrzymując cztery trójkąty równoboczne, każdy o długości boku $\frac{1}{2}$. Usuwamy środkowy trójkąt. Każdy z pozostałych trzech mniejszych trójkątów dzielimy analogicznie na cztery równe trójkąty. Ich wierzchołkami są środki boków trójkątów otrzymanych w pierwszym kroku. Usuwamy środkowe trójkąty. Postępowanie powtarzamy (IFS) uzyskując w nieskończonym kroku *trójkąt Sierpińskiego*.



5.2 Zbiory Julii

Zbiory Julii są fraktalami określonymi przez zależność rekurencyjną punktów płaszczyzny zespolonej. Równanie startuje od dowolnego punktu z_0 i stałej c. Poniżej zależność rekurencyjna dla zbiorów Julii typu „*Quadratic*”:

$$z_{n+1} := z_n^2 + c$$

5.3 Zbiór Mandelbrota

Zbiór mandelbrota uzyskuje się w sposób bardzo podobny do zbiorów Julii.

$$z_{n+1} := z_n^2 + c \qquad z_0 = 0$$