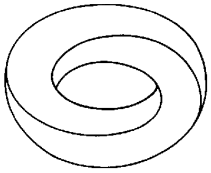
# Od paradoksów do Hipotezy Continuum
czyli
# TAJEMNICE NIESKOŃCZONOŚCI

Mariusz Gromada
lipiec 2007
mariusz.gromada@wp.pl
http://multifraktal.net



*„Skończoność jest pożywieniem matematyki, nieskończoność - tlenem."*
*„W matematyce - chodzimy na skróty przez nieskończoność."*
*„Nieskończoność jest równikiem pomiędzy skończonymi biegunami założenia i tezy."*
*„Do najistotniejszych pojęć matematyki należą mosty łączące skończoność i nieskończoność."*

## 1 Wstęp

Leżącą cyfra osiem, *lemniskata* $\infty$, dobrze wszystkim znany symbol *nieskończoności*. Czasami z plusem, czasami z minusem, innym razem samotnie, ale zawsze od początku do końca, od zera do krańca wszystkiego... Pojęcie nieskończoności pojawia się w wielu dziedzinach. Świat fizyki zastanawia się czy Wszechświat jest nieskończony? Czy istnieje nieskończoność w mikroskali? Czy materię można dzielić na coraz mniejsze części, powtarzając czynność bez końca? Świat werbalny przedstawia nieskończoność jako granicę, jako zjawisko cykliczne, jako abstrakcję. Boskość wraz z wiecznością silnie wiążą się z nieskończonością dla świata duchowego. Nawet w świecie komputerów prosty błąd programisty może doprowadzić do nieskończonej pętli. Wiele możliwości interpretacji, wiele typów nieskończoności, a świat matematyki dostarcza kolejnych... Poniższy tekst przedstawia wprowadzenie do pojęcia nieskończoności w matematyce.

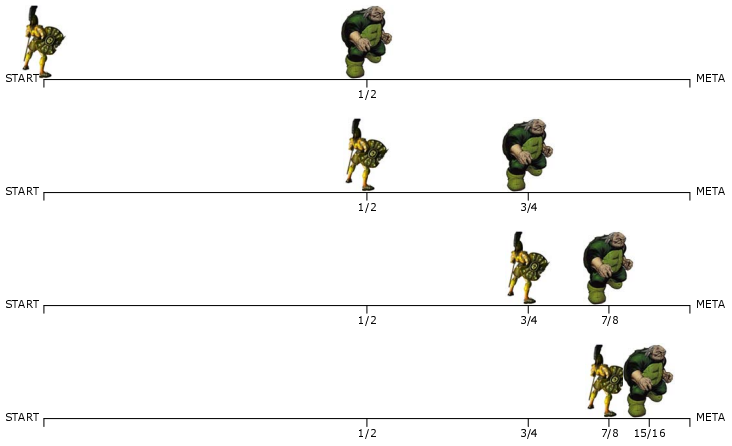
# 2 O nieskończoność potencjalnej i nieskończoności aktualnej

Pojęcie nieskończoności w matematyce pojawiło się w czasach starożytnych. Już wtedy zauważono, że prowadzi ono do wielu paradoksów. W efekcie powstały dwa zasadnicze podejścia do rozumienia nieskończoności określane mianem *nieskończoności potencjalnej* i *nieskończoności aktualnej*. O nieskończoności potencjalnej mówimy wtedy, gdy stwierdzamy, że zawsze możemy wykonać kolejny krok, kolejną iterację, niezależnie od punktu, w którym rozważany problem znajduje się obecnie. Uczeń otrzymuje zadanie wypowiedzenia liczby większej niż ta, podana przez nauczyciela. Po kilku próbach dowodzi, że zawsze jest w stanie spełnić żądanie swojego opiekuna. W ten sposób uczy się rozpoznawać nieskończoność potencjalną. Podobnie o nieskończoności potencjalnej świadczy wiedza, że do danej skończonej kolekcji zawsze możemy dodać nowy element. Przykładem kolekcji może być pewien skończony zbiór liczb parzystych. Oczywiste jest, że możliwe jest jego rozszerzenie o kolejną liczbę parzystą, która wcześniej się w nim nie znajdowała. Gdy jednak patrzymy na wszystkie liczby parzyste całościowo, na ich nieskończoną liczbę, to mamy do czynienia z nieskończonością aktualną. Nieskończoność aktualna to również cały zbiór liczby naturalnych lub rzeczywistych czy też całość zbioru punktów w przestrzeni. Starożytni uważali, że umysł ludzki nie jest w stanie ogarnąć nieskończoności aktualnej, że nie można tego, co nieograniczone, studiować metodami ograniczonymi, i że badać można tylko nieskończoność potencjalną. Kolejnym źródłem niechęci matematyków do przyjęcia istnienia nieskończoności aktualnej był lęk przed paradoksami z nią związanymi.

## 2.1 Paradoksy

*Paradoks Zenona z Elei*[1]: *Achilles i żółw* - Achilles potrafi biegać dwukrotnie szybciej od żółwia, na starcie pozwala mu oddalić się o $\frac{1}{2}$ dystansu. Startują w tym samym momencie. Kiedy Achilles dobiega $\frac{1}{2}$ dystansu żółw jest już w $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ dystansu. Gdy Achilles dobiegnie do $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ dystansu, żół znowu mu ucieknie pokonując $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ dystansu. Gdy Achilles dotrze w to miejsce, żółw ponownie oddali się o $\frac{1}{16}$ dystansu, i tak w nieskończoność. Wniosek - Achilles nigdy nie przegoni żółwia, mimo że biegnie od niego dwa razy szybciej.

[1] Zenon z Elei - (ok. 490 - 430 p.n.e) filozof grecki, uczeń Parmenidesa, należał do szkoły eleatów (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).




*Paradoks Proklosa*[2]: *„Średnica dzieli koło na dwie równe części. Jeżeli jednak za pomocą jednej średnicy powstają dwa półkola i jeżeli przeprowadzić przez środek nieskończenie wiele średnic, to okaże się, że półkoli będzie dwa razy więcej niż nieskończenie wiele.*" Tak Proklos w komentarzu do I księgi „Elementów" Euklidesa[3], zauważył że zbiór nieskończony może mieć tyle samo elementów co jego część. Czy dwa razy nieskończoność równa się nieskończoność?

*Paradoks Galileusza*[4]: w dziele „Discori" Galileusz zauważa, że liczb kwadratowych postaci $1, 4, 9, 16, \ldots$ jest tyle samo co liczb naturalnych $1, 2, 3, 4, \ldots$, co przeczyło intuicji, która mówiła, że część musi być mniejsza od całości.

*Paradoks Hilberta*[5]: *Hotel Hilberta* wyobraźmy sobie portiera w Grand Hotelu, w którym jest nieskończona liczba pokoi. Hotel jest pełny, nie ma wolnych miejsc. Przychodzi do hotelu kolejny klient chcący wynająć pokój. Okazuje się, że sytuacja portiera nie jest bez wyjścia i nie musi odprawić klienta z kwitkiem. Portier wykonuje sprytny trik. Klienta z pokoju numer 1 przenosi do pokoju nr 2, tego z pokoju nr 2 do pokoju nr 3, ogólnie klienta z pokoju o

[2]Proklos zwany diadochem - (412 - 485) filozof grecki, uczeń Plutarcha i Syrianosa, objął kierownictwo platońskiej Akademii po Domninosie (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[3]Euklides - (około 365 - 300 p.n.e.) matematyk grecki pochodzący z Aten, przez większość życia działający w Aleksandrii. Autor pierwszych prac teoretycznych z matematyki, zarówno w dziedzinie geometrii, jak i w teorii liczb, jako pierwszy podał aksjomatyczne ujęcia geometrii (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[4]Galileusz - (1564 - 1642) włoski astronom, astrolog, fizyk i filozof, twórca podstaw nowożytnej fizyki (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[5]David Hilbert - (1862 - 1943) wybitny matematyk niemiecki, ajmował się algebraiczną teorią liczb, teorią równań całkowych, zagadnieniami rachunku wariacyjnego, podstawami geometrii i logiki matematycznej oraz problemami fizyki matematycznej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

numerze $n$ portier przekwaterowuje do pokoju $n+1$. W ten sposób każdy z dotychczasowych gości zostanie przekierowany, a kolejny klient otrzyma wolny już pokój o numerze 1.

*Paradoksy sumy nieskończonej*: paradoksów dotyczących sum nieskończonych powstało bardzo wiele. Sytuacja została uporządkowana przez teorię szeregów liczbowych zainicjowaną przez Newtona[6] i uzupełnioną przez Cauchyego[7] definicją sumy szeregu liczbowego.

Czy zero równe jest jedności?

$$0 = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots$$
$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$
$$0 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots + (-1+1) + \ldots = 1$$
$$0 = 1$$

Kolejny przykład to:

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$
$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s$$
$$s = \frac{1}{2}$$

Zatem $0 = \frac{1}{2}$ !

Lęk przed paradoksami związanymi z nieskończonością trwał aż do drugiej połowy XIX wieku. W latach siedemdziesiątych XIX wieku Georg Cantor[8]

[6]Isaac Newton - (1643 - 1727) angielski fizyk, matematyk, astronom, filozof, historyk, badacz Biblii i alchemik. Odkrył prawo powszechnego ciążenia, a także prawa ruchu leżące u podstaw mechaniki klasycznej. Niezależnie od Gottfrieda Leibniza przyczynił się do rozwoju rachunku różniczkowego i całkowego (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[7]Augustin Louis Cauchy - (1789 - 1857) francuski matematyk. Zapoczątkował projekt postulujący i przedkładający dowody twierdzeń analizy matematycznej w ścisłej formalnej postaci. Zawdzięczamy mu również kilka ważnych twierdzeń analizy zespolonej oraz zapoczątkowanie studiów nad grupami permutacyjnymi. Swą dogłębnością oraz precyzją Cauchy wywarł wielki wpływ na metodologię pracy ówczesnych matematyków oraz ich nowoczesnych następców. Twórca precyzyjnego pojęcia granicy (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[8]Georg Cantor - (1845 - 1918) niemiecki matematy, twórca podstaw teorii mnogości (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

rozpoczął prace badawcze nad zbiorami złożonymi z absolutnie dowolnych elementów. Nie zajmowano się wcześniej tak ogólnymi tworami, a pomysł na analizowanie tak ogólnych zbiorów powstał pod wpływem jego prac nad zbieżnością pewnych szeregów. Efektem badań było opublikowanie w latach 1874-1897 podstaw teorii mnogości, zwanej też teorią zbiorów. Można powiedzieć, że Cantor przełamał strach przed badaniem nieskończoności aktualnej i że jego rezultaty wstrząsnęły ówczesną matematyką.

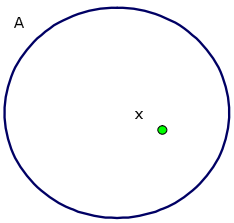
# 3 O teorii mnogości

W dzisiejszych czasach każdy matematyk w sposób naturalny posługuje się takimi terminami jak zbiór, funkcja czy relacja. Są to podstawowe pojęcia teorii mnogości, dziedziny, która przeniknęła praktycznie całą matematykę. Bardzo często wykład z teorii mnogości i logiki określany jest również wstępem do matematyki lub podstawami matematyki.

## 3.1 Aksjomatyka teorii mnogości

Do dalszego rozumienia tekstu nie jest konieczne dokładne poznanie podanych niżej aksjomatów i pojęć. Możliwe jest pominięcie części sekcji 3, bez utraty wartości popularno-naukowej całości wykładu. Autor uznał jednak za zasadne przedstawienie głównych założeń teorii. Zwracamy uwagę, że definicje będą oparte na intuicji celem nie zniechęcania czytelnika nie związanego bezpośrednio z matematyką.

Przed postawieniem formalnych aksjomatów teorii mnogości przyjmujemy jako *pojęcia pierwotne*[9] pojęcie zbioru oraz relację przynależności elementu do zbioru, tj. relację $x \in A$.




[9]Pojęcie pierwotne – obiekt w teorii sformalizowanej, o którym mówi ona w swych aksjomatach, konstruując wypowiedzi (twierdzenia) zgodnie z przyjętymi w tej teorii regułami wnioskowania. Pojęcia pierwotnego nie definiuje się językiem teorii, tylko podaje się definicję znaczeniową; przez podanie informacji (lub wymagań) o relacjach, w których występuje (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

I. Aksjomat jednoznaczności. Jeżeli zbiory $A$ i $B$ mają te same elementy, to $A$ i $B$ są identyczne.

*Przykład: jeżeli $A = \{a, b, c\}$ oraz $B = \{a, b, c\}$ to konsekwencją aksjomatu jednoznaczności jest równość zbiorów $A$ i $B$.*

II. Aksjomat sumy. Dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru $A$ i wszystkie elementy zbioru $B$ i który żadnych innych elementów nie zawiera.

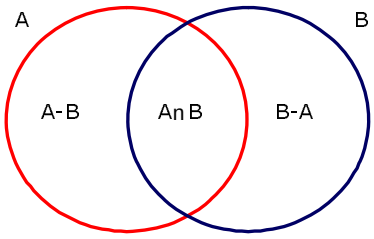
*Przykład: jeżeli $A = \{a, b, c\}$ oraz $B = \{b, c, d, e\}$ to konsekwencją aksjomatu sumy jest istnienie zbioru $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. Dodatkowo ważnym następstwem aksjomatu jednoznaczności jest jednoznaczność działań, to znaczy dla danych zbiorów $A$ i $B$ istnieje tylko jeden zbiór spełniający aksjomat sumy, co uzasadnia użycie symbolu $A \cup B$.*

III. Aksjomat różnicy. Dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$ istnieje zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru $A$, które nie są elementami zbioru $B$.

*Przykład: jeżeli $A = \{a, b, c\}$ oraz $B = \{c, d, e\}$ to konsekwencją aksjomatu różnicy jest istnienie zbioru $A \setminus B = \{a, b\}$. Podobnie jak w przypadku aksjomatu sumy ważnym następstwem aksjomatu jednoznaczności jest jednoznaczność działań, to znaczy dla danych zbiorów $A$ i $B$ istnieje tylko jeden zbiór spełniający aksjomat różnicy, co uzasadnia użycie symbolu $A \setminus B$.*

IV. Aksjomat istnienia. Istnieje co najmniej jeden zbiór.

*Zagwarantowanie istnienia choćby jednego zbioru wprawia system aksjomatów w „ruch”. Również istnienie zbioru pustego jest konsekwencją postawionych założeń. Mianowicie wystarczy zdefiniować $\emptyset = A \setminus A$. Zauważmy ponadto, że nie ma potrzeby przyjmowania aksjomatu o istnieniu iloczynu (części wspólnej $A \cap B$ zbiorów $A$ i $B$)- iloczyn może być wyrażony różnicą $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, co intuicyjnie potwierdza poniższy rysunek.*



Powyższe 4 aksjomaty są wystarczające do badania podstawowych własności zbiorów, szczególnie w przypadkach zbiorów o skończonej liczbie elementów. Szerszy obraz podstaw teorii uzyskamy po podaniu kolejnych 3.

V. Aksjomaty wyróżniania. Dla każdej funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ i dla każdego zbioru $A$ istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych elementów zbioru $A$, które spełniają tę funkcję zdaniową.

*Pojęcie zdania (ogólnie rachunku zdań) wywodzi się z logiki matematycznej. Rachunek zdań stosuje się do zdań, które posiadają jedną z dwóch wartości logicznych* 0 *(fałsz) lub* 1 *(prawda). Przykład prawdziwego zdania to „*$1 < 2$*”, natomiast zdaniem fałszywym jest „*$5 = 10$*”. Aby wprowadzić pojęcie funkcji zdaniowej konieczne jest ustalenie pewnego zbioru $X$. Niech $\varphi(x)$ będzie wyrażeniem, które staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej $x$ wstawimy dowolną jej wartość ze zbioru $X$ (zbiór $X$ jest zakresem wartości zmiennej $x$). Tak zdefiniowane wyrażanie nazywamy funkcją zdaniową. Np funkcja zdaniowa „*$x < 0$*” dla zakresu $X = \mathbb{R}$ (zbiór liczb rzeczywistych) generuje zdania prawdziwe dla $x$ rzeczywistych ujemnych* $(< 0)$ *oraz zdania fałszywe dla $x$ rzeczywistych dodatnich i* 0 $(\geqslant 0)$. *W odniesieniu do powyższego przykładu istnienie zbioru liczb rzeczywistych ujemnych jest skutkiem aksjomatu V.*

VI. Aksjomat zbioru potęgowego. Dla każdego zbioru $A$ istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru $A$.

*Przykład: rozważmy podzbiory* 3*-elementowego zbioru* $A = \{a, b, c\}$

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{c\}$
4. $\{a, b\}$
5. $\{a, c\}$
6. $\{b, c\}$
7. $\{a, b, c\}$ *(każdy ze zbiorów jest zarazem własnym podzbiorem)*
8. $\emptyset$ *(zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru)*

*Wypisaliśmy* $8 = 2^3$ *podzbiorów zbioru $A$. W ogólności zbiór $n$-elementowy posiada dokładnie* $2^n$ *podzbiorów. Konsekwencją aksjomatu VI jest istnienie zbioru* $2^A$ *wszystkich podzbiorów zbioru $A$*

$$2^A = \Big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\Big\}$$

*który z analogi do ich liczby oznacza się symbolem $2^A$ i nazywa zbiorem potęgowym. Czasami zbiory, których elementy są również zbiorami nazywamy rodzinami zbiorów.*

VII. Aksjomat wyboru. Dla każdej rodziny $\mathfrak{R}$ zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, do którego należy dokładnie po jednym elemencie każdego ze zbiorów rodziny $\mathfrak{R}$.

*Aksjomat wyboru nazywany jest często pewnikiem wyboru. Zbiór, którego istnienie zakładamy na podstawie pewnika wyboru nazywamy selektorem. Aksjomat wyboru jest trywialny i wynika z innych aksjomatów, jeśli zastosować go do skończonych rodzin zbiorów. Dla nieskończonych rodzin zbiorów wydaje się również intuicyjny, lecz jego następstwa okazały się zaskakujące dla matematyki. Najlepszym przykładem jest paradoks Banacha-Tarskiego, gdzie korzystając z pewnika wyboru Stefan Banach*[10] *i Alfred Tarski*[11] *udowodnili twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli. Wykazali oni w 1924 roku, że w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ można zwykłą trójwymiarową kulę „rozciąć" na skończoną liczbę części, a następnie używając wyłącznie obrotów i translacji złożyć dwie kule o takich samych promieniach jak promień kuli wyjściowej. W swym dowodzie wykorzystali jednak inne „osobliwe" zbiory, które nie są mierzalne*[12] *w sensie Lebesgue'a*[13].

Zaznaczmy, że rozważając układ aksjomatów I-IV uzupełniony aksjomatami V-VII możliwe jest pominięcie niektórych z nich [1].

## 3.2 Pojęcie relacji i funkcji

Do formalnego podania definicji *relacji* oraz *funkcji* niezbędne jest wprowadzenie *par uporządkowanych* oraz *iloczynów kartezjańskich* zbiorów. W poniższym tekście skupimy się jedynie na intuicji tych pojęć, a zainteresowanego czytelnika odsyłamy do specjalistycznej lektury.

[10] Stefan Banach - (1892 - 1945) polski matematyk, jeden z czołowych przedstawicieli lwowskiej szkoły matematycznej, twórca podstaw analizy funkcjonalnej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[11] Alfred Tarski - (1901 - 1983) polski matematyk i filozof, jeden z najwybitniejszych logików wszech czasów (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[12] Teoria miary – dziedzina matematyki zajmująca się bardzo szeroko pojętymi własnościami miary, czyli usystematyzowanego spojrzenia na zagadnienia długości, pola powierzchni czy objętości (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[13] Henri Lebesgue - (1875 - 1941) francuski matematyk. Twórca nowoczesnego ujęcia teorii miary i całki, zwanej na jego cześć całką Lebesgue'a (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

Relacja ogólnie wyraża zależność pomiędzy dwoma bądź większą liczbą elementów (przedmiotów, cech, obiektów). My zajmiemy się jedynie *relacjami dwuargumentowymi* w matematyce, czyli zależnościami pomiędzy dwoma elementami. W tym celu ustalamy dwa zbiory $X$ i $Y$ oraz dwa elementy należące do tych zbiorów $x \in X$ i $y \in Y$. Jeżeli elementy $x$ i $y$ są ze sobą w zależności (oznaczmy ją przez $\mathbf{R}$) to mówimy, że $x$ oraz $y$ są w relacji dwuargumentowej $\mathbf{R}$, co zapisujemy $x\mathbf{R}y$. Przykładem relacji dwuargumentowej jest *relacja mniejszości* $x < y$ dla naturalnych $x$ oraz $y$ ($x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$); 2 jest w relacji mniejszości z 3, co zapisujemy $2 < 3$, podobnie 0 jest w relacji mniejszości z 1 co zapisujemy $0 < 1$. Ogólnie jeżeli $x$ jest mniejsze od $y$ to $x$ jest w relacji mniejszości z $y$ ($x < y$). Zauważmy, że w przypadku relacji mniejszości dla ustalonego $x$ (przykładowo 2) istnieje więcej niż jeden element $y$, będący w relacji z $x$ (np.: $2 < 3$, $2 < 4$, $2 < 5$, ...). Podobnie dla ustalonego $y$ (przykładowo 10) istnieje więcej niż jeden element $x$, będący w relacji z $y$ (np.: $2 < 10$, $3 < 10$, $4 < 10$, ...). Ponadto zwracamy uwagę, że jeżeli $x$ jest w relacji z $y$ ($x\mathbf{R}y$) to nie musi zachodzić *symetria* (*przemienność*), tzn nie musi być prawdą, że $y$ jest w relacji z $x$ ($y\mathbf{R}x$). Ponownie dobrą ilustracją jest relacja mniejszości, jeżeli 2 jest w relacji mniejszości z 3 ($2 < 3$) to nieprawdą jest, że 3 jest w relacji mniejszości z 2 (3 nie jest mniejsze od 2). Relacją symetryczną jest *relacja równości*, tzn. z faktu, że $x = y$ wynika, że $y = x$. Relacja równości jest dodatkowo *zwrotna*, tzn. zawsze $x$ jest w relacji równości z $x$, co zapisujemy $x = x$. Ogólnie mówimy, że relacja $\mathbf{R}$ jest zwrotna jeżeli dla każdego $x$ zachodzi $x\mathbf{R}x$. Przykładem relacji, która nie jest zwrotna jest relacja mniejszości, gdzie dla dowolnego $x$ nieprawdą jest, że $x < x$. Relacje nierówności oraz równości posiadają bardzo ciekawą własność nazywaną *przechodniością* relacji. Mówimy, że relacja $\mathbf{R}$ jest przechodnia jeżeli dla dowolnych $x, y, z$ z faktu, że $x\mathbf{R}y$ i $y\mathbf{R}z$ wynika, że $x\mathbf{R}z$. Łatwo zauważyć, że dla relacji mniejszości, jeżeli $x < y$ i $y < z$ to $x < y < z$, a tym samym $x < z$. Podobnie dla relacji równości, jeżeli $x = y$ oraz $y = z$ to zachodzi $x = y = z$, a w konsekwencji relacja elementów $x = z$.

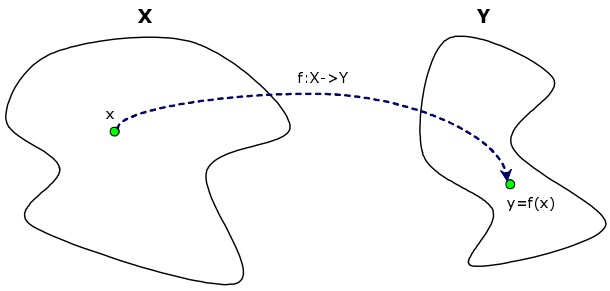
**Definicja 1** *Relacja, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywana jest relację równoważności.*

Jest to bardzo ważna klasa relacji. Relacja równości spełnia warunki relacji równoważności.

*Funkcja* jest szczególnym przypadkiem relacji. Każda funkcja jest relacją, ale nie każda relacja jest funkcją. Kiedy piszemy funkcję $y = f(x)$ mówimy o relacji elementów $x \in X$ oraz $f(x) \in Y$. Zauważmy, że drugi argument relacji będącej funkcją jest jednoznacznie wyznaczony przez argument pierwszy $x$.

Mówiąc bardziej precyzyjnie - ustalony element $x \in X$ jest w relacji z jednym i tylko jednym elementem $y \in Y$ ($y = f(x)$). Ten właśnie warunek czyni funkcję szczególnym przypadkiem relacji.

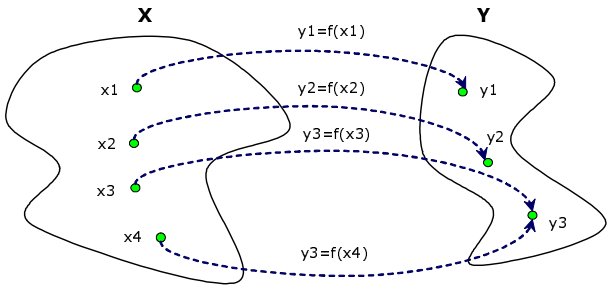
**Definicja 2** *Niech dane będą dwa zbiory $X$ i $Y$. Przez funkcję, której argumenty przebiegają zbiór $X$, a wartości należą do $Y$, rozumiemy przyporządkowanie każdemu argumentowi $x$ ze zbioru $X$ dokładnie jednej wartości $y$ ze zboru $Y$, co oznaczamy $f : X \to Y$. Wartość funkcji $f : X \to Y$ dla argumentu $x \in X$ oznaczamy przez $f(x)$.*




Przykładów funkcji można podać bardzo wiele, dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ np. $f(x) = 2x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$.

**Definicja 3** *Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa (iniekcja, jednoznaczna, „1-1") jeżeli z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$.*

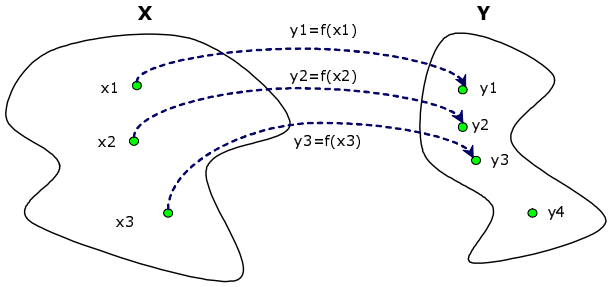
Funkcja zaprezentowana na poniższym obrazku nie jest różnowartościowa ponieważ $y_3 = f(x_3) = f(x_4)$ a $x_3 \neq x_4$.



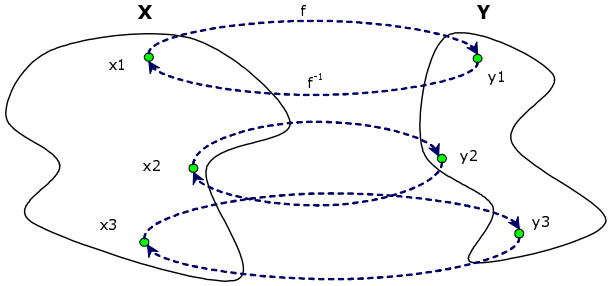

Funkcja różnowartościowa nie przyjmuje dwukrotnie tej samej wartości.

**Definicja 4** *Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest „na" (surjekcja) jeżeli dla każdego $y \in Y$ istnieje taki argument $x \in X$, że $y = f(x)$.*

Funkcja przedstawiona na poniższym obrazku nie jest „*na*”, gdyż dla elementu $y_4 \in Y$ nie istnieje argument w zbiorze $X$.




Gdy funkcja $f : X \to Y$ jest „na” to mówimy, że funkcja $f$ przekształca zbiór $X$ na zbiór $Y$. Jedną z najważniejszych klas funkcji są funkcje, które posiadają obie omówione własności. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *bijekcją* jeżeli jest róznowartościowa i „na”. Przykład bijekcji przedstawia rysunek poniżej.




Zauważmy, że bijekcja wprowadza wzajemną jednoznaczność. Elementowi $x_1 \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y_1 \in Y$ i na odwrót, elementowi $y_1 \in Y$ odpowiada dokładnie jeden element $x_1 \in X$. Łatwo zauważyć, że dla bijekcji $f : X \to Y$ istnieje odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : Y \to X$, które jest również bijekcją. Poniżej dwa przykłady funkcji rzeczywistych bijekcji.

- Przekształcenia afiniczne $y = ax + b$.
- Hiperbola $y = x^3$.

Wstęp do relacji oraz funkcji zostanie wykorzystany podczas omawiania mocy zbiorów oraz relacji równoliczności (sekcja 4.4.1).

# 4 Nieskończoność w matematyce

Pojęcie nieskończoności w matematyce występuje w kilku formach. Znamy nieskończoność iteracji (nieskończoność kroku), nieskończoność podziału, nieskończoność jako punkt lub wartość oraz nieskończoność jako liczbę elementów zbioru.

## 4.1 Nieskończoność iteracji

Nieskończoność kroku lub iteracji jest to typowy przykład styczności matematyki z nieskończonością potencjalną. Definicja ciągu $a_n = 2n$ daje możliwość wyznaczenia dowolnego wyrazu tego ciągu, niejako na żądanie, bez konieczności zapisania ich wszystkich, a nawet poznania wyrazów poprzedzających. Innym przykładem jest *rekurencja* (*rekursja*), która uzależnia możliwość wykonania kolejnego kroku od kroków poprzedzających. W przypadku rekursji musimy zawsze podać punkty startowe. Dobrą ilustracją jest *ciąg Fibonacciego*[14]

$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \qquad f_0 = 0,\ f_1 = 1$$

Ciąg Fibonacciego można zapisać w postaci jawnej. Ogólnie niekiedy możliwe jest przekształcenie ciągów rekurencyjnych do postaci jawnej.

**Definicja 5 (ciąg)** *Ciągiem nazywamy każdą funkcję $a : \mathbb{N} \to Y$ określoną na zbiorze liczb naturalnych. Elementy ciągu oznaczamy krócej $a_n$ zgodnie z zasadą $a_n = a(n)$.*

*Indukcja matematyczna* jest przykładem wykorzystania nieskończoności potencjalnej w przypadku dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych. Metodę zaproponował w XVII wieku Blaise Pascal[15]. Jeśli $T(n)$ jest twierdzeniem dotyczącym liczby naturalnej $n$, to aby udowodnić prawdziwość tego twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych wystarczy sprawdzić jego prawdziwość dla ustalonego $n_0$, to znaczy sprawdzić, że zachodzi $T(n_0)$. Następnie wychodząc z założenia, że $T(n)$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n$ nie mniejszej od $n_0$ wykazać, że prawdziwe jest twierdzenie $T(n+1)$. Wiele twierdzeń udowodniono dzięki zasadzie indukcji. Indukcja matematyczna

[14]Leonardo Fibonacci - (1175 - 1250) włoski matematyk, wyłożył podstawy arytmetyki, badał zagadnienia dotyczące algebry i geometrii (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[15]Blaise Pascal - (1623 - 1662) francuski filozof, matematyk, pisarz i fizyk. Tematem jego badań były prawdopodobieństwo, próżnia, ciśnienie atmosferyczne, oraz apologetyka, teodycea i fideizm. Na jego cześć nazwano jednostkę ciśnienia paskal oraz język programowania Pascal (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

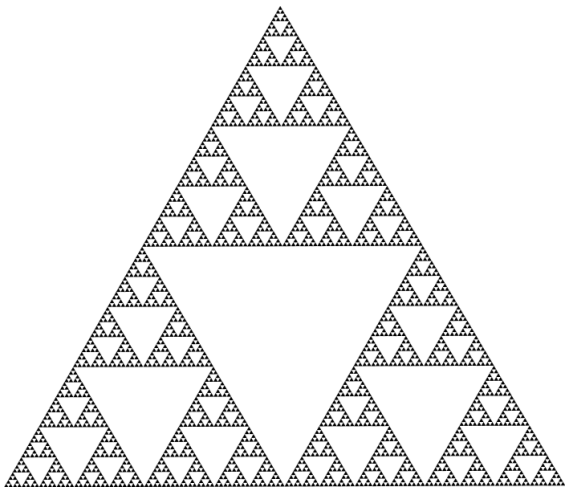
jest szczególnym przypadkiem twierdzenie o *indukcji pozaskończonej*, którego treści nie będziemy tu przytaczać.

Nieskończoność iteracji obserwujemy również w przypadku *fraktali*. Fraktale powstają jako iteracje pewnych funkcji, najczęściej ciągu zbiorów, niejako kopiując „samego siebie" poprzez *odwzorowania zwężające*. Zbiory fraktalne posiadają zadziwiające własności, szczególnie w kontekście *wymiaru* oraz tzw. *samopodobieństwa*. Szczegóły pomijamy z uwagi na charakter niniejszej pracy, a zainteresowanych czytelników odsyłamy do [8]. Poniżej prezentujemy kilka najważniejszych fraktali.

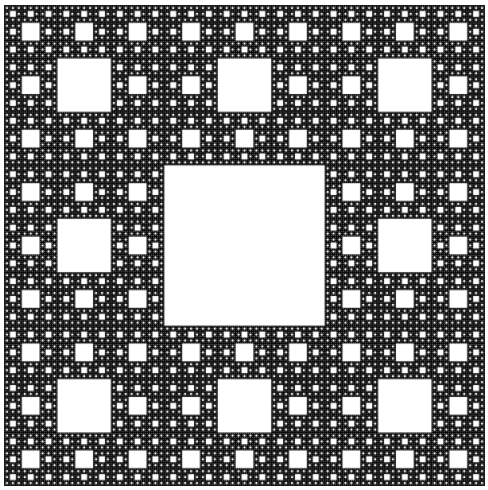
*Zbiór Cantora* - odcinek dzielimy na 3 równe części i usuwamy część środkową (otwartą). W ten sposób powstaje pierwsza iteracja, której wynikiem są 2 nowe odcinki. Każdy z nich dzielimy na 3 równe części i ponownie usuwamy części środkowe. W drugiej iteracji powstają 4 odcinki. W $n$-tej iteracji otrzymujemy $2^n$ odcinków. Powtarzając procedurę w nieskończoność otrzymujemy zbiór Cantora.

*Trójkąt Sierpińskiego*[16] - trójkąt równoboczny dzielimy na 4 trójkąty równoboczne (łącząc środki boków trójkąta), usuwamy trójkąt środkowy. W pierwszej iteracji otrzymujemy 3 trójkąty, każdy z nich dzielimy na kolejne 4 mniejsze i usuwamy trójkąty środkowe otrzymując 9 mniejszych. W $n$-tym kroku powstaje $3^n$ trójkątów równobocznych. W nieskończonym kroku otrzymujemy trójkąt Sierpińskiego.

[16]Wacław Sierpiński - (1882 - 1969) polski matematyk, jeden z czołowych przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej. Prowadził badania z zakresu teorii liczb, analizy matematycznej, ogólnej i deskryptywnej teorii mnogości, topologii mnogościowej, teorii miary i kategorii oraz teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. Szczególne znaczenie mają jego prace na temat pewnika wyboru i hipotezy continuum. (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

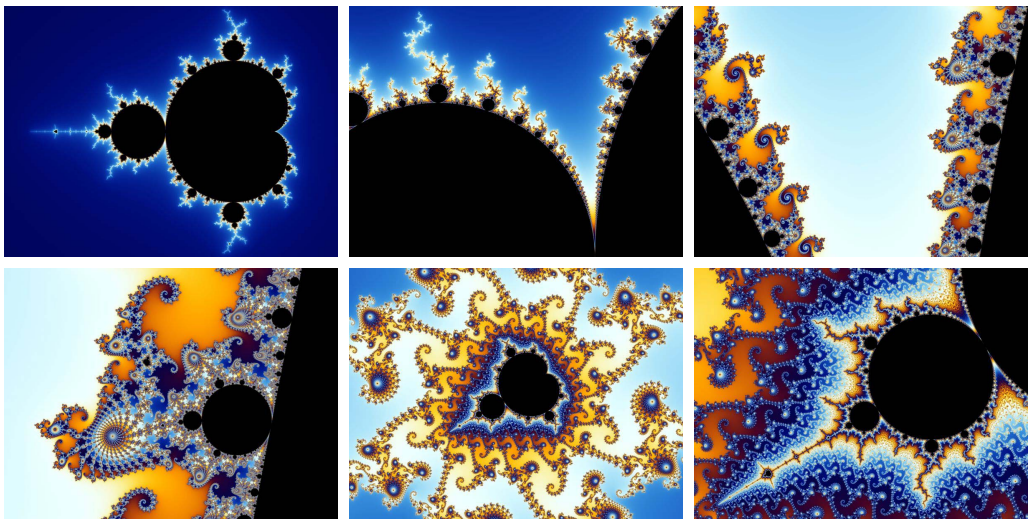


*Dywan Sierpińskiego* - boki kwadratu dzielimy na 3 równe części, łącząc punkty naprzeciwległe, z tak powstałego zbioru usuwamy kwadrat środkowy otrzymując 8 mniejszych kwadratów. Każdy z nich ponownie dzielimy na mniejsze kwadraty usuwając kwadraty środkowe. W drugim kroku powstają 64 jeszcze mniejsze kwadraty. Ogólnie w $n$-tej iteracji otrzymujemy $8^n$ kwadratów. Krok nieskończony prowadzi do dywanu Sierpińskiego.



Zwróćmy uwagę na bogatą strukturę zaprezentowanych zbiorów. Nie tylko liczba zawartych w nich elementów jest nieskończona, ale również forma, czyli powtarzający się w nieskończoność wzór. Dodatkowo ich miary są zerowe, tzn. długość zbioru Cantora wynosi 0, pola powierzchni trójkąta i dywanu Sierpińskiego również są zerowe. Jako ciekawostkę podamy, że wymiary fraktali są niecałkowite, również dla zaprezentowanych wyżej przykładów. Badania

nad *geometrią fraktalną* zostały zapoczątkowane przez Benoita Mandelbrota[17], który wykorzystując prace dwóch francuskich matematyków Gastona Julii[18] i Pierre'a Fatou[19] dotyczące zachowania się iteracji pewnych funkcji zespolonych, stworzył pierwsze oszałamiające wizualizacje zbiorów fraktalnych. Poniżej zamieszczamy kilka różnych ujęć zbioru Mandelbrota.



Ponownie łatwo zauważalny jest powtarzający się wzór, przy odpowiednim powiększeniu ujawniający nowe oblicza, tajemnice nieskończoności...

## 4.2 Nieskończoność podziału

Analiza wielkości *nieskończenie małych* odegrała w matematyce wielką rolę. To dzięki niej wprowadzono między innymi pojęcie zbioru liczb rzeczywistych, *teorię granic*, *rachunek różniczkowy*, zwany również „rachunkiem wielkości nieskończenie małych" oraz *rachunek całkowy*. Był to przełom, oto matematyka udostępniła innym dziedzinom (głownie fizyce) niezwykle użyteczne narzędzia analityczne oraz opisowe. Nie można tutaj pominąć związku z pojęciem *ciągłości* (continuum), któremu za podstawowe cechy przypisuje się własności *nieskończonej podzielności* oraz *spójności*. Jednak już przy najprostszej próbie definicji owych właściwości napotkano szereg problemów.

[17]Benoit Mandelbrot - (ur. w 1924, w Warszawie) - francuski matematyk, pochodzenia polskiego, twórca podstaw geometrii fraktalnej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[18]Gaston Julia - (1893 - 1978) matematyk francuski, jeden z prekursorów teorii systemów dynamicznych, profesor Ecole Polytechnique (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[19]Pierre Fatou - (1878 - 1929) francuski matematyk, badający układy dynamiczne w przestrzeni liczb zespolonych (źródło `http://en.wikipedia.org/`).

Przyjmując punkt jako budulec continuum nieskończoność podzielności staje w sprzeczności z próbą zrealizowania tej podzielności. Dobrą ilustracją są słowa Arystotelesa[20].

*„Jeśliby kto założył, że ciało jest pewną rozciągłością wszędzie podzielną, natknąłby się na trudność. Jeśli bowiem rozciągłość jest wszędzie podzielna to mogłaby być w końcu podzielona. A jeśliby się tego dokonało to co w końcu zostanie? Wtedy, byt dzielony albo będzie złożony z punktów i jego składniki będą pozbawione rozciągłości, albo będzie całkowicie niebytem, wobec tego musiałby już powstać z nicości, a całość nie byłaby zaiste niczym innym niż pozorem. Podobnie, gdyby był złożony z punktów, nie będzie rozciągły.*"

Brak możliwości zrozumienia natury ciągłości był bezpośrednią przyczyną wykluczenia z nauk ścisłych nauki o ruchu. Konsekwencją punktowej budowy continuum jest brak prędkości chwilowej - prędkość musi zawsze trwać przez pewien okres czasu (ruch jest stanem, który trwa przez jakiś czas).

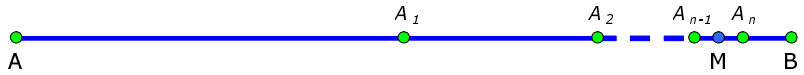
Matematyczne próby zbadania ciągłości rozpoczęły się już w starożytności. Rozważanie geometrii prostej doprowadziło do zaproponowania aksjomatyki prostej zawierającej *Postulat Archimedesa*[21] - każdy odcinek jest mniejszy od pewnej całkowitej wielokrotności dowolnego innego odcinka. W rozumieniu Eudoksosa[22] z Knidos powyższy aksjomat oznacza, że każda wielkość matematyczna może być zwielokrotniona dowolną ilość razy, aż przewyższy dowolną inną wielkość. W szczególności prosta jest nieograniczona. Mówiąc inaczej dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych $a$ i $b$ istnieje taka liczba naturalna $n$, że $a < n \cdot b$. Jako bezpośredni wniosek z Postulatu Archimedesa otrzymuje się również lemat Eudoksosa o wyczerpywaniu.

[20]Arystoteles - (384 - 322 p.n.e.) j eden z dwóch, obok Platona największych filozofów greckich. Stworzył opozycyjny do platonizmu i równie spójny system filozoficzny, który bardzo silnie działał na filozofię i naukę europejską, a jego chrześcijańska odmiana zwana tomizmem była od XIII w. i jest po dziś dzień oficjalną filozofią Kościoła Katolickiego. Arystoteles położył ogromne zasługi w astronomii, fizyce, biologii i logice, jednak większość jego teorii astronomicznych i fizycznych okazała się błędna, a przyjęcie ich za dogmat przez filozofię scholastyczną długo opóźniało rozwój tych nauk w Europie (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

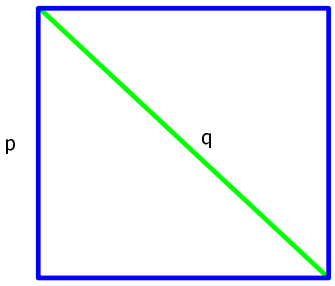
[21]Archimedes - (około 287 - 212 p.n.e.) wybitny grecki fizyk i matematyk, autor traktatu o kwadraturze odcinka paraboli, twórca hydrostatyki i statyki, prekursor rachunku nieskończonościowego (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[22]Eudoksos z Knidos (około 408-355 p.n.e) - grecki astronom, matematyk, filozof i geograf, zajmował się proporcją, złotym podziałem i metodą wyczerpywania. Udowodnił wzór na objętość stożka, stworzył podstawy rachunku nieskończonościowego (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

**Lemat 1 (Eudoksosa)** *Jeśli ustalić odcinek $AB$ wraz z położonym na nim punktem $M$ oraz takimi punktami $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$, że odcinek $AA_1$ jest więcej niż połową odcinka $AB$ oraz odcinki $A_mA_{m+1}$ stanowią więcej niż połowy odcinków $A_mB$, to istnieje takie $n$, że punkt $A_n$ leży na odcinku $MB$.*




Zatem prostą można dzielić na części dowolnie małej długości, nieskończoność podzielności została zauważona. Stosując intuicyjne pojęcie granicy starożytni Grecy obliczali metodą wyczerpywania pola powierzchni figur geometrycznych. W daną figurę wpisywano taki ciąg figur o znanych polach, aby każda kolejna stanowiła więcej niż połowę części pozostałej (nie pokrytej). Bardziej formalnie - figura $P$ jest wyczerpana wielokątami $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (wielokąty nie nachodzą na siebie), jeśli wielokąt $P_n$ pokrywa co do pola więcej niż połowę figury nie zakrytej wielokątami $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$. Używając współczesnego języka powiemy, że żądanie wyczerpania w kroku $n$ ponad połowy pozostałej figury gwarantuje zbieżność szeregu liczbowego reprezentującego sumę ciągu pól wpisanych wielokątów, a w granicy pole powierzchni figury wyjściowej. Potrzeba pojęcia granicy została zauważona w naturalny (geometryczny) sposób. Dodatkowo uwidoczniono „dziurawość" zbioru liczb wymiernych oraz jedną z możliwości uzupełnienia tych braków - granicę ciągu liczb wymiernych reprezentujących pola pewnych figur. Wielkim krokiem było geometryczne odkrycie przez Pitagorejczyków[23] liczb niewymiernych. Dowodząc niewspółmierności boku kwadratu i jego przekątnej dostarczyli sposobu na konstrukcję nowych liczb.



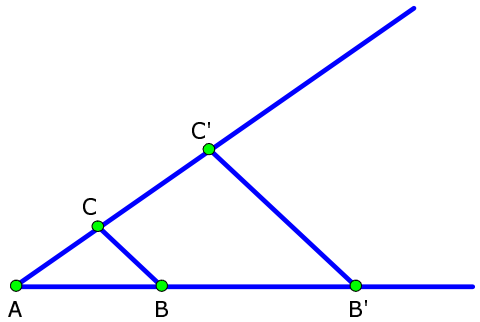

Dziś każdy wie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, która odpowiada długości przekątnej kwadratu o długości boku 1. Dowód niewspółmierności, przeprowadzony metodą nie wprost, wykorzystuje jednoznaczność rozkładu liczb na-

[23]Pitagorejczycy - wyznawcy doktryny rozwiniętej przez Pitagorasa i jego następców w szkole religijno-filozoficzno-naukowej, którą założył Pitagoras w Krotonie w Wielkiej Grecji (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

turalnych na czynniki pierwsze oraz twierdzenie Pitagorasa[24]. Sposobu konstrukcji kolejnych „nowych” liczb dostarczył Euklides podając geometryczną metodę dzielenia odcinków, niekoniecznie współmiernych. Idea została wykorzystana przez Eudoksosa w jego teorii proporcji. Przykładem zastosowania teorii proporcji jest twierdzenie Talesa[25].

**Twierdzenie 1 (Talesa)** *Jeśli z punktów $B$ i $B'$ leżących na jednym z ramion kąta o wierzchołku $A$ poprowadzić proste pod tym samym kątem do tego ramienia, to przetną one drugie ramię w takich punktach $C$ i $C'$, że*

$$AB : AB' = AC : AC'$$




Eudoksos w swojej teorii proporcji był bardzo bliski współczesnemu pojęciu liczby. Zabrakło jedynie proporcji o pochodzeniu innym niż geometryczne...

Matematyka ponownie powróciła do tezy o niemożności budowy continuum z punktów dopiero w średniowieczu. Oto Galileusz odkrył prawo spadku swobodnego mówiące, że wszystkie ciała spadają z jednakowym przyspieszeniem, niezależnie od masy. Opis tego ruchu wyrażony prędkością początkową $v_0$ , przyspieszeniem $a$ oraz czasem $t$ przedstawia poniższe równanie

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Empiryczna poprawność powyższej zależności stanowiła mocny argument za istnieniem prędkości chwilowej, od tej chwili prędkość nie musi trwać przez

[24]Pitagoras - (582 - 493 p.n.e) grecki matematyk, filozof, mistyk, twórca Twierdzenia Pitagorasa (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[25]Tales z Miletu - (około 625 - 545 p.n.e.) grecki filozof, matematyk, astronom, inżynier, polityk, podróżnik i kupiec, zaliczany do siedmiu mędrców starożytnej Grecji, uznawany za twórcę podstaw nauki i filozofii europejskiej. Odkrył, że magnetyt oraz potarty bursztyn mają własności przyciągania. Zaliczany do filozofów szkoły jońskiej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

pewien okres czasu...

W drugiej połowie XVII wieku Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz[26] niezależnie opracowali podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. W swoich pracach wykorzystali jeszcze wtedy niesprecyzowane pojęcie granicy i ciągłości. Ich wyniki w bardzo istotny sposób wpłynęły na rozwój analizy matematycznej oraz doprowadziły do odkrycia praw dynamiki. Minęło jeszcze bardzo dużo czasu zanim ich idee zostały ugruntowane, ale udowodniono zdumiewającą siłę metod wykorzystujących subtelne własności continuum. Współczesne określenie pojęcia granicy (ciągu, funkcji) powstały w XIX wieku. W sposób ścisły i formalny po raz pierwszy podał je francuski matematyk Augustin Louis Cauchy, a dzisiejsze brzmienie pochodzi od niemieckiego matematyka o imieniu Karl Weierstrass[27]. Z uwagi na przejrzystość idei ograniczamy się do podania jedynie najważniejszych definicji.

**Definicja 6 (granica ciągu)** *[Cauchy] Mówimy, że ciąg $a_n$ posiada granicę $g$ (jest zbieżny do $g$, gdy $n$ dąży do nieskończoności), co zapisujemy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad lub \qquad a_n \to g$$

*jeżeli dla dowolnie małej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $N_\epsilon$, że dla każdego $n > N_\epsilon$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \epsilon$.*

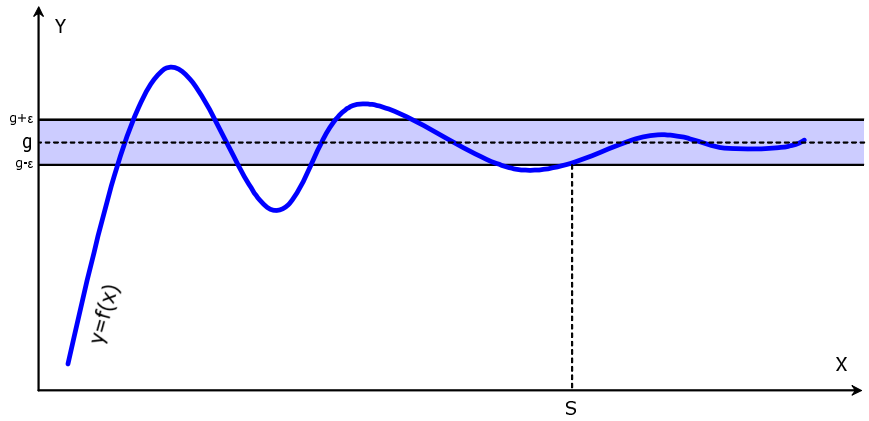
Wykorzystując kwantyfikatory powyższe zapisujemy krócej

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{N_\epsilon}\forall_{n>N_\epsilon}|a_n - g| < \epsilon$$

Zwróćmy uwagę, że definicja granicy ciągu oparta jest na pojęciu nieskończoności potencjalnej. Ciąg zbieżny przybliża wartość swojej granicy z dowolną dokładnością, ale poza skończoną liczbą elementów. Dla dowolnie małej liczby możemy wskazać pozycję, od której wszystkie kolejne elementy ciągu leżą dostatecznie blisko granicy.

[26]Gottfried Wilhelm Leibniz, znany także pod nazwiskiem Leibnitz - (1646 - 1716) niemiecki filozof, matematyk, prawnik, inżynier – mechanik, fizyk i dyplomata. Niezależnie od Newtona, stworzył rachunek różniczkowy, przy czym jego notacja tego rachunku okazała się praktyczniejsza (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[27]Karl Weierstrass - (1815 - 1897) niemiecki matematyk, zwolennik arytmetyzacji analizy matematycznej, twórca precyzyjnego pojęcia granicy (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).




**Definicja 7 (granica funkcji w nieskończoności)** *[Cauchy] Mówimy, że funkcja $f$ określona w przedziale $(a, \infty)$ posiada granicę $g$ (jest zbieżna do $g$, gdy $x$ dąży do nieskończoności), co zapisujemy*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$$

*jeżeli dla dowolnie małej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $S_\epsilon$, że dla każdego $x > S_\epsilon$ spełniona jest nierówność $|f(x) - g| < \epsilon$.*

Definicję bardzo łatwo rozszerzyć dla granicy funkcji w minus nieskończoności.

**Definicja 8 (granica funkcji w punkcie)** *[Cauchy] Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ posiada w punkcie $x_0$, będącym punktem skupienia zbioru $A$, granicę $g$ (jest zbieżna do $g$, gdy $x$ dąży do $x_0$), co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

*jeżeli dla dowolnie małej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego $x \in A$ z nierówności $0 < |x - x_0| < \delta$ wynika nierówność $|f(x) - g| < \epsilon$.*

Dla naszych rozważań wystarczy powiedzieć, że punkt skupienia zbioru $A$ to taki punkt $x$, który jest granicą pewnego ciągu elementów zbioru $A$ różnych od $x$. Zwróćmy uwagę, że punkt skupienia zbioru nie musi do tego zbioru należeć. Przykładowo każdy punkt na odcinku jest zarazem jego punktem skupienia. Rozważmy przedział otwarty $(0, 1)$ oraz ciągi $a_n = \frac{1}{n+1}$ oraz $b_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Elementy ciągów $a_n$ oraz $b_n$ są również elementami zbioru $(0, 1)$, ale $\lim a_n = 0$ i $\lim b_n = 1$, czyli punkty 0 i 1 są punktami skupienia zbioru $(0, 1)$ pomimo, że leżą poza nim.

Z powyższego wynika, że granica funkcji może istnieć w punktach, w których funkcja jest nieokreślona. W przypadku punktów określoności funkcji granica funkcji w punkcie może być różna od wartości funkcji. Inną definicję granicy funkcji w punkcie, równoważną na podstawie pewnika wyboru z definicją Cauchy'ego, podał niemiecki matematyk Heinrich Eduard Heine[28].

**Definicja 9 (granica funkcji w punkcie)** *[Heine] Mówimy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ posiada w punkcie $x_0$, będącym punktem skupienia zbioru $A$, granicę $g$ (jest zbieżna do $g$, gdy $x$ dąży do $x_0$), co zapisujemy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

*jeżeli dla każdego takiego ciągu $\{x_n\}$ elementów zbioru $A$ różnych od $x_0$, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, ciąg $\Big\{f(x_n)\Big\}$ wartości funkcji $f$ dąży do $g$, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.*

Definicja 9 okazuje się być bardzo praktyczna w przypadku dowodzenia, że dana liczba $g$ nie jest w istocie granicą funkcji w określonym punkcie. Wystarczy bowiem podać jeden ciąg spełniający warunki określone przez Heinego, który „generuje" ciąg $f(x_n)$ zbieżny do innej granicy niż $g$.

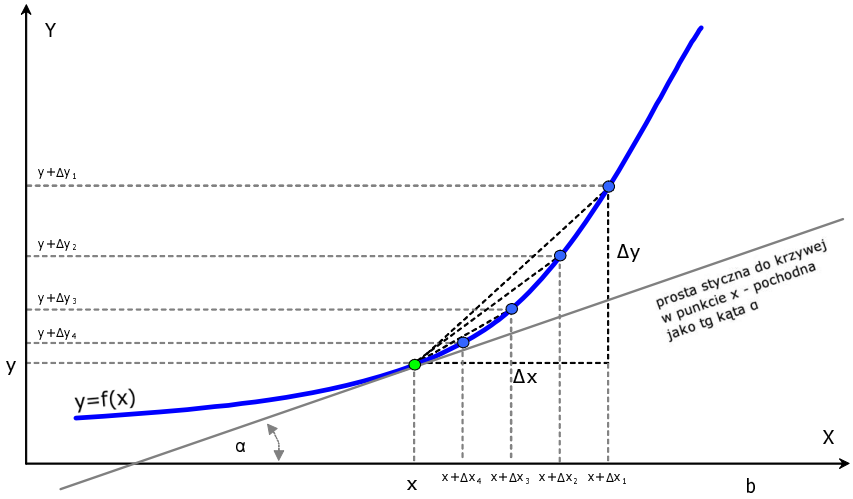
Analiza zależności pomiędzy przyrostem argumentu funkcji a przyrostem jej wartości jest podstawą rachunku różniczkowego. Wystarczy sobie wyobrazić funkcję $f(t)$, której wartości zależą od czasu $t$. Dobrym przykładem takiej funkcji jest zależność prędkości od czasu. Zmiana prędkość w czasie świadczy o przyspieszeniu, uzależnionym od czasu. Przybliżone wartości przyspieszenia w chwili $t$ można wyznaczyć poprzez iloraz $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ zmiany prędkości $\Delta v$ (przyrostu prędkości) i zmiany czasu $\Delta t$ (przyrostu czasu). Im mniejszy będzie przyrost czasu tym oszacowanie przyspieszenia w chwili $t$ będzie bliższe prawdzie. Naturalny wydaje się krok graniczny $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ prowadzący do wartość przyspieszenia w chwili $t$. Tak otrzymaną wartość nazywamy *pochodną funkcji w punkcie.*

**Definicja 10** *Mówimy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ $(y = f(x))$ określona na przedziale otwartym $U \subseteq R$ posiada w punkcie $x_0 \in U$ pochodną jeżeli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego*

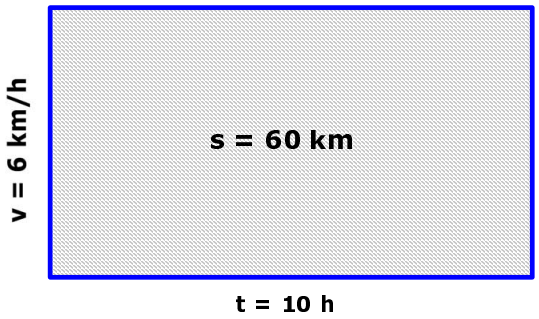
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[28]Heinrich Eduard Heine - (1821 - 1881) niemiecki matematyk, znany ze szkolnej definicji granicy funkcji, autor twierdzenia Heinego-Borela charakteryzującego zbiory zwarte w przestrzeni euklidesowej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

*o funkcji $f$ mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie $x_0$, a punkt $x_0$ nazywamy punktem różniczkowalności funkcji $f$. Wartość granicy ilorazu różnicowego nazywamy pochodną funkcji $f$ w punkcie $x_0$ i oznaczamy $f'(x_0)$. Mówimy, że funkcja $f$ jest różniczkowalna jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny (różniczkowalna funkcja $f$ posiada w każdym punkcie pochodną $f'$). Inne oznaczenia pochodnej to $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.*



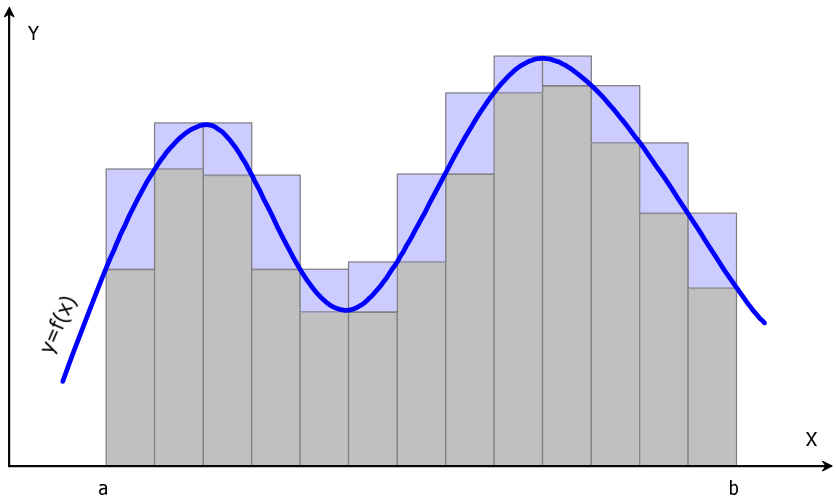

Z prędkością i czasem bezpośrednio związana jest również droga. W przypadku stałej prędkości $v$ wykres prędkości jest równoległy do osi czasu, a droga jest iloczynem prędkości i minionego czasu, inaczej polem prostokąta o bokach $v$ oraz $t_a - t_b$ jeżeli przyjąć $t_a$ jako czas w chwili rozpoczęcia pomiaru a $t_b$ jako czas jego zakończenia.




Gdy prędkość jest zmienna (zależy od czasu) przybliżeniem drogi przebytej pomiędzy chwilami $t_a$ i $t_b$ będzie suma pól kilku prostokątów otrzymanych przez podział odcinka czasu $(t_a, t_b)$ na mniejsze części tak, aby możliwe było do przyjęcia założenie o stałości prędkości na każdej części z osobna. Oszacowanie będzie tym lepsze im mniejsze będą długości częściowych odcinków.

Ponownie naturalny jest krok graniczny prowadzący do wartości rzeczywistej drogi przebytej pomiędzy chwilami $t_a$ i $t_b$, rozumianej jako pole powierzchni pod krzywą prędkości pomiędzy punktami $t_a$ i $t_b$. Powyższe rozumowanie stoi u podstaw rachunku całkowego, gdzie pole powierzchni pod krzywą nazywa się *całką oznaczoną*.

Do wprowadzenia formalnej definicji całki Riemanna[29] niezbędne jest podanie kilku innych mniej lub bardziej skomplikowanych pojęć. My odniesiemy się jedynie do intuicji. Na poniższym rysunku przedstawione są dwie metody przybliżenia pola pod krzywą pomiędzy punktami $a$ i $b$. Pierwsza z nich, nazywana *sumą dolną*, podaje pole niższe niż rzeczywiste. Druga, określana mianem *sumy górnej*, w oczywisty sposób zwiększą pole w stosunku do wartości nominalnej. Zmniejszenie długości dobranych przedziałów (w konsekwencji zwiększenie ich liczby) prowadzi do coraz lepszych wyników oszacowania. Kolejne przybliżenia można zapisać w postaci ciągów $s_n$ dla sumy dolnej oraz $S_n$ dla sumy górnej. Podziały dobieramy tak, aby długości ich wszystkich zbliżały się z każdym krokiem do 0.




**Definicja 11 (całka Riemanna)** *Mówimy, że funkcja $f$ jest całkowana w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ jeżeli ciągi reprezentujące sumę dolną $(s_n)$ oraz sumę górną $(S_n)$ są zbieżne do tej samej granicy. Wartość tej granicy nazywamy całką Riemanna (lub całką oznaczoną) funkcji $f$ na przedziale*

[29] Bernhard Riemann - (1826 - 1866) matematyk niemiecki. Twórca wielowymiarowej geometrii Riemanna, której zasady stanowią podstawę ogólnej teorii względności. Zapoczątkował systematykę geometrii nieeuklidesowych. Jego prace z teorii liczb i teorii funkcji analitycznych wywarły duży wpływ na rozwój matematyki. Autor prac o szeregach trygonometrycznych i teorii całki (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

*$[a, b]$ i oznaczamy*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Okazuje się, że podstawowe operacje rachunku różniczkowego i całkowego - różniczkowanie i całkowanie - są operacjami odwrotnymi, o czym przekonujemy się analizując całkę Newtona-Leibniza oraz podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Całka Newtona-Leibniza, wykorzystując *funkcje pierwotne*, dostarcza niezwykle prostego sposobu na wyznaczanie całek oznaczonych wielu funkcji.

**Definicja 12** *Mówimy, że funkcja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ określona na przedziale $[a, b]$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jeżeli istnieje pochodna $F'$ funkcji $F$ oraz dla każdego $x \in [a, b]$ spełniony jest warunek*

$$F'(x) = f(x)$$

Zatem funkcja pierwotna danej funkcji $f$, określonej w pewnym obszarze domkniętym to taka funkcję $F$ określona w tym obszarze, której pochodna jest równa $f$. W praktyce np. wykres prędkości jest funkcją pierwotną wykresu przyspieszenia, a całka wykresu prędkości jest drogą.

**Definicja 13 (całka Newtona-Leibniza)** *Całkę Newtona-Leibniza funkcji $f$ na przedziale domkniętym $[a, b]$ określamy jako różnicę $F(b)$–$F(a)$, gdzie $F$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f$ określoną na tym przedziale. Całka Newtona-Leibniza jest również całką oznaczoną.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Funkcja pierwotna jest wyznaczana z dokładnością do stałej, stały czynnik (np. przesunięcie wykresu w dół lub w górę) nie wpływa na wartość pochodnej (nie zmienia kąta nachylenia stycznej do krzywej). Istnienie choćby jednej funkcji pierwotnej gwarantuje istnieje całej rodziny funkcji pierwotnych.

**Definicja 14 (całka nieoznaczona)** *Całką nieoznaczoną funkcji $f$ nazywamy rodzinę jej funkcji pierwotnych i oznaczamy*

$$\int f(x)dx$$

Jeżeli $F$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f$ to całka nieoznaczona funkcji $f$ przyjmuje postać

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

gdzie $C$ jest dowolną stałą, nazywaną stałą całkowania.

Omawianie aspektów związanych z granicami zakończymy przedstawieniem pojęcia ciągłości. Według Cauchy'ego funkcja $f(x)$ jest ciągła, jeśli dla każdej wartości $x$ różnica $f(x+\alpha) - f(x)$ maleje nieograniczenie wraz z liczbową wartością $\alpha$. Bernard Bolzano[30] ciągłość rozumiał jako ciągłą zmianę funkcji $f(x)$, jeśli dla każdej wartości $x$ różnica $f(x+\omega) - f(x)$ może być uczyniona mniejszą niż jakakolwiek dana wielkość, jeśli za $\omega$ można przyjąć dowolnie małą wielkość.

Elementem łączącym continuum z teorią mnogości było podanie ścisłej metody konstrukcji liczb rzeczywistych. W XIX wieku opublikowano prace Weierstrassa (1872), Heinego, Cantora i Dedekinda[31]. Metody Weierstrassa i Dedekinda zostały później rozwinięte. Weierstrass, Cantor i Heine konstruując liczby rzeczywiste bazowali na szeregach nieskończonych, a Dedekind stworzył tzw. przekroje nazwane jego nazwiskiem.

## 4.3 Nieskończoność jako punkt

Punkt w nieskończoności nie zawsze słusznie kojarzony jest z granicami. Symbole przedstawiające zbieżności ciągów bądź funkcji mogą sugerować, że granica jest wartością ciągu w bardzo odległym punkcie nazywanym nieskończonością.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Interpretacja, że liczba $n$ dąży do nieskończoności nasuwa skojarzenia, że $n$ „zbliża" się do pewnego punktu. Nic bardziej mylnego. Powyższy symbol przedstawia jedynie fakt „zbliżania" się wartości ciągu do pewnej liczby wraz ze wzrostem $n$.

[30] Bernard Bolzano - (1781 - 1848) czeski matematyk, filozof, historyk, logik i teolog. Sformułował wiele ważnych twierdzeń matematycznych, ale ponieważ jego prace opublikowano dopiero po jego śmierci, to są przypisywane innym naukowcom (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[31] Richard Dedekind - (1831 - 1916) niemiecki matematyk, uczeń Petera Gustava Dirichleta i Carla Friedricha Gaussa. Jego prace dotyczą teorii liczb, algebry, teorii mnogości i analizy matematycznej. Wprowadził do matematyki wiele nowych pojęć, takich jak grupa czy pierścień, rozwinął teorię liczb niewymiernych w oparciu o przekroje (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

### 4.3.1 Domknięcie zbioru

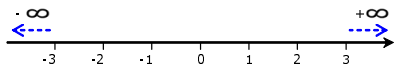
W poprzednich sekcjach omówiliśmy ważną klasę ciągów zbieżnych do skończonej granicy. W matematyce istnieją jeszcze ciągi, które nie są zbieżne (np. $a_n = (-1)^n$) oraz ciągi, które albo maleją albo rosną nieograniczenie (ciągi rozbieżne do $\pm\infty$, przykładowo $a_n = 2n$). Zbiór liczb rzeczywistych nie zawiera punktów w nieskończoności. Punkty te można traktować jako „granice" ciągów nieograniczenie albo rosnących albo malejących. Aby ułatwić opis, uczynić go bardziej eleganckim oraz łatwiejszym w interpretacji, dodaje się czasami do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ dwa punkty w nieskończoności - plus nieskończoność ($+\infty$) i minus nieskończoność ($-\infty$). Tak rozszerzony zbiór oznaczamy $\overline{\mathbb{R}}$ i nazywamy domkniętym zbiorem liczb rzeczywistych. Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku rozróżniamy „kierunek" nieskończoności.

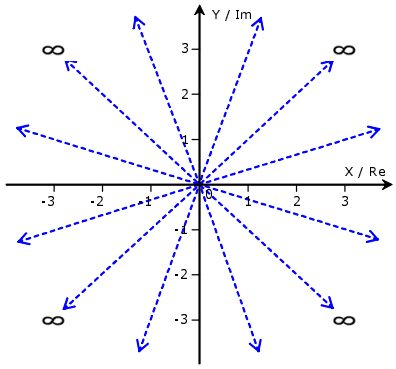
$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Podobną operację można wykonać dla płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ lub ciała liczb zespolonych (płaszczyzny zespolonej).

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

W przypadku płaszczyzny uznaje się, że każdy kierunek prowadzi do tej samej nieskończoności.

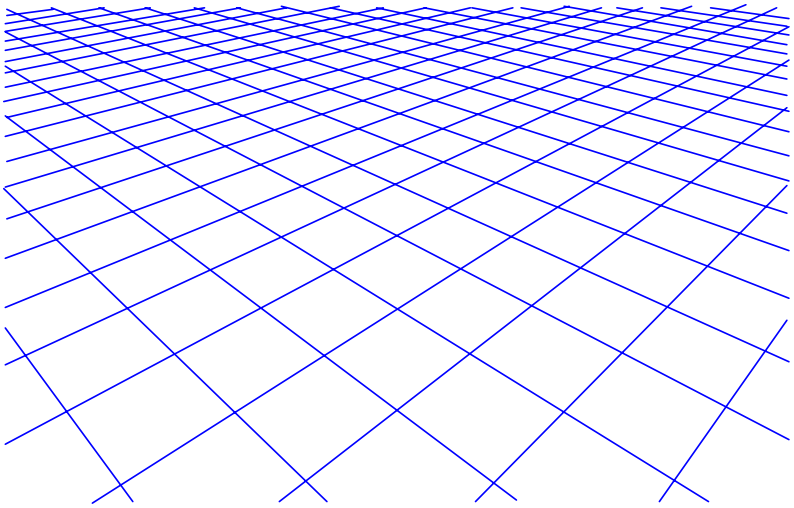



### 4.3.2 Geometrie nieeuklidesowe

Rozważmy linię horyzontu. Przyglądając się prostym równoległym, przykładowo torom kolejowym, zauważamy, że proste te łączą się w bardzo odległym punkcie, to znaczy na horyzoncie. Linia horyzontu składa się z punktów, w których łączą się różne równoległe proste. Powyższe spostrzeżenia stoją u podstaw *geometrii rzutowej*, jednej z *geometrii nieeuklidoseowych*. Geometria nieeuklidesowa to typ geometrii, w której nie obowiązują wszystkie z

pięciu aksjomatów opublikowanych w dziele „Elementy” Euklidesa. W geometrii nieeuklidesowej przyjmuje się pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa, natomiast zakłada się, że piąty z nich (*postulat równoległości*) jest nieprawdziwy.



W geometrii rzutowej, podobnie jak w geometrii euklidesowej, zakłada się, że przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Dodane zostaje jednak założenie, że dwie dowolne proste na płaszczyźnie muszą się przeciąć. Powstaje pytanie co z prostymi równoległymi? Przyjmuje się, że proste równoległe przecinają się „w punkcie bardzo odległym”, to znaczy w nieskończoności. Do płaszczyzny dodaje się nową prostą, składającą się z takich punktów - jest to *prosta w nieskończoności*. Prosta w nieskończoności jest abstrakcyjnym odpowiednikiem linii horyzontu, punkty w nieskończoności to punkty, w których proste równoległe łączą się na horyzoncie. Twórcą geometrii rzutowej był francuski matematyk Jean Victor Poncelet[32]. W geometrii rzutowej punktem w nieskończoności nazywamy kierunek, czyli zbiór wszystkich prostych równoległych (jest on punktem przecięcia wszystkich prostych o danym kierunku).

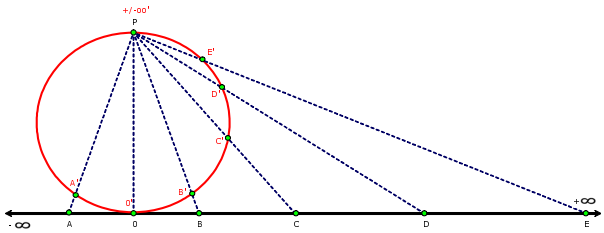
Kolejnym przykładem naturalnej geometrii nieeuklideoswej jest *geometria eliptyczna* (nazywana również *geometrią sferyczną*). W geometrii euklidesowej suma kątów wewnetrznych trójkąta wynosi $2\pi$, również proste równoległe nie przecinają się w żadnym punkcie. Jednak na Ziemi dwie drogi o tym samym kierunku zawsze połączą się na biegunach. W trójkącie narysowanym

[32]Jean Victor Poncelet - (1788 - 1867) francuski matematyk i inżynier, był jednym ze współtwórców geometrii rzutowej i autorem prac z mechaniki teoretycznej, wprowadził jednostkę kilogramometr pracy mechanicznej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

na kuli ziemskiej suma katów wewnętrznych zawsze przekroczy $2\pi$. Jest to konsekwencja faktu, że powierzchnia ziemi jest sferą, na sferze jedynie lokalne własności mogą być dobrze przybliżone geometrią euklidesową. Geometria eliptyczna jest szczególnym przypadkiem *geometrii Riemanna* dla stałej i dodatniej krzywizny. *Geometria hiperboliczna* (zwana także *geometrią siodła*, *geometrią Łobaczewskiego*[33] lub *geometrią Bolyaia*[34]*-Łobaczewskiego*) jest kolejnym przykładem geometrii nieeuklideowej będącej szczególnym przypadkiem geometrii Riemanna, tym razem o stałej i ujemnej krzywiźnie.

### 4.3.3 Rzut stereograficzny

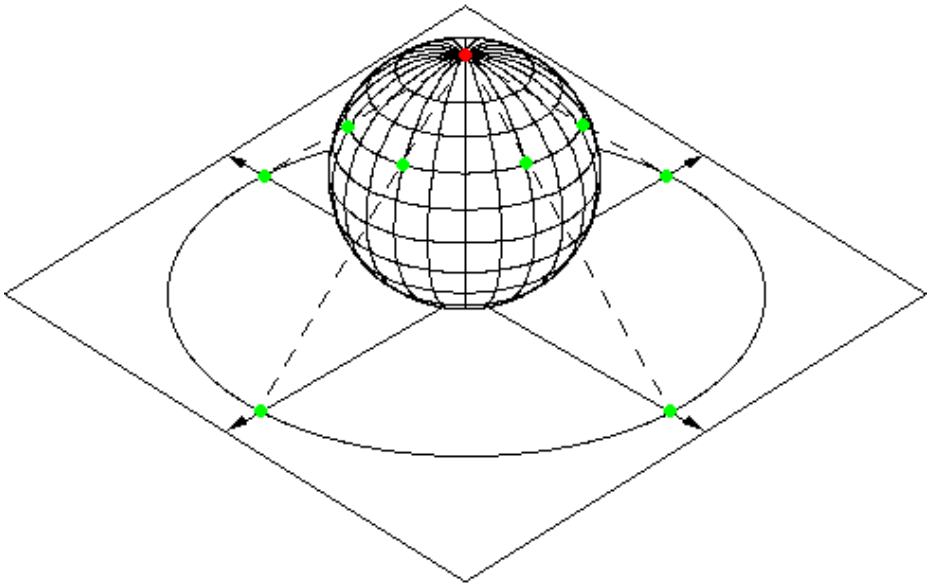
*Odwzorowanie sterograficzne* znane było już w starożytnej Grecji. Matematyczny opis tego przekształcenia podał w II wieku p.n.e. Hipparchos[35] z Nikei. Odwzorowanie sterograficzne (inaczej *rzut stereograficzny*) polega na przekształceniu geometrycznym punktów płaszczyzny na sferę, w którym środkiem rzutu jest punkt sfery, zaś rzutnia jest styczna do sfery w antypodzie środka rzutu. Rzut stereograficzny ma wiele ciekawych własności. Podstawowe to wzajemna jednoznaczność ze sfery z wyłączonym jednym punktem (środkiem rzutu) na płaszczyznę oraz zachowanie kątów (dwie proste na sferze i ich obrazy na płaszczyźnie przecinają się pod takim samym kątem). W przekształceniu odwrotnym (płaszczyzny na sferę) prosta na płaszczyźnie (rzutni) odwzorowuje się na okrąg na sferze przechodzący przez środek rzutu, a obrazem każdego okręgu na rzutni jest na okrąg na sferze.




[33]Mikołaj Iwanowicz Łobaczewski - (1792 - 1856) rosyjski matematyk, twórca (niezależnie od Jánosa Bolyai'a) geometrii nieeuklidesowej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[34]János Bolyai - (1802 - 1860) matematyk węgierski, twórca (niezależnie od Łobaczewskiego) geometrii nieeuklidesowej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[35]Hipparchos z Nikei - (około 190 - 120 p.n.e.) matematyk, geograf i astronom grecki. Zmierzył odległość Ziemi od Księżyca, podał czas obrotu Ziemi wokół Słońca (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).



Rzut stereograficzny szeroko stosowany jest w kartografii i krystalografii. Ciekawe jest spostrzeżenie, że środek rzutu można traktować jako obraz punktów w nieskończoności...

## 4.4 Nieskończoność jako liczba elementów zbioru

W poniższej części tekstu wprowadzimy czytelnika w zagadnienia związane z nieskończonością aktualną w matematyce. Odnosząc się do intuicji dla zbiorów skończonych pokażemy kilka ciekawych własności nieskończoności. Skupimy się na wynikach Cantora, które charakteryzuje niezwykły stopień abstrakcyjności. Cantor, jak nikt inny, pokazał jak bardzo powiązano matematykę ze światem rzeczywistym, w pewnym sensie ograniczając idee. Abstrakcjonizm jego myślenia sprawiał, że często poddawał w wątpliwość własne okrycia. Został odrzucony przez ówczesne środowisko matematyczne, które nie chciało przyjąć jego dokonań. Pojęcia różnych nieskończoności, równoliczność punktów odcinka z punktami prostej, równoliczność punktów z wnętrza kwadratu z punktami jego obwodu, definicja zbioru liczb rzeczywistych, pojęcie przedziałów zstępujących... Dzięki tym nowoczesnym ideom Cantor przez wielu uważany jest za ojca współczesnej matematyki, za twórcę teorii mnogości, za prekursora topologii, najważniejszej dziedziny matematyki I połowy XX wieku.

### 4.4.1 Relacja równoliczności

Badanie liczby elementów zbioru skończonego nie sprawia trudności. Liczba owoców na drzewie, liczba zapałek w pudełku, liczba książek na półce - wszystkie te wartości określają liczby elementów w odpowiednich zbiorach. Ogólnie dla zbioru skończonego $n$-elementowego $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ definiuje się *moc* zbioru jako liczbę jego elementów i oznacza przez $|A| = n$. Liczba naturalna odpowiadająca mocy danego skończonego zbioru nazywana jest *skończoną liczbą kardynalną*. Oczywiście nie istnieje nieskończona liczba naturalna. Do badania mocy zbiorów nieskończonych wprowadzono więc *nieskończone liczby kardynalne*.

Mówimy, że dwa zbiory są równoliczne jeżeli są równej mocy (posiadają tyle samo elementów). W przypadku zbiorów skończonych istnieją dwie proste metody pozwalające zweryfikować czy zbiory są równoliczne. Pierwsza to policzyć elementy w zbiorach i porównać otrzymane liczby (niemożliwe do przeprowadzenia w przypadku zbiorów nieskończonych). Druga metoda to połączyć elementy porównywanych zbiorów w pary i przekonać się czy każdy z elementów zbioru pierwszego ma parę w zbiorze drugim oraz czy każdy z elementów zbioru drugiego ma parę w zbiorze pierwszym. Przykładowo stwierdzając, że nie ma wolnych miejsc w kinie podczas premiery kasowego filmu wiemy, że równoliczne są zbiory miejsc w kinie oraz potencjalnych widzów. Podobnie zapinając poprawnie uszytą koszulę przekonujemy się, że guzików jest dokładnie tyle samo co dziurek na te guziki. Tworzenie par elementów zbiorów nieskończonych musiałoby zająć wieczność. Wystarczy zatem pokazać, że takie „sparowanie" jest możliwe. Zauważmy, że ustawienie elementów zbioru $X$ i $Y$ w pary jest funkcją ze zbioru $X$ do zbioru $Y$. Dla zbiorów równolicznych jest to odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne - bijekcja. Podobnie każda bijekcja $f : X \to Y$ ustawia elementy zbiorów $X$ oraz $Y$ w pary. Dowolny elementu $x \in X$ tworzy parę z dokładnie jednym elementem $y \in Y$ ($y = f(x)$). Również każdy element $y \in Y$ posiada dokładnie jedną parę $x \in X$ wyznaczoną przez odwzorowanie odwrotne do $f$ ($x = f^{-1}(y)$). Powyższe prowadzi do wniosku, że dwa zbiory $X$ i $Y$ są równoliczne jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y$. W teorii mnogości nasz wniosek jest definicją równoliczności.

**Definicja 15** *Mówimy, że zbiory $X$ i $Y$ są równoliczne jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y$.*

Matematyka zna wiele odwzorowań będących bijeckją. Wszystkie można z łatwością wykorzystać do stwierdzania równoliczności zbiorów. Równoliczność

zbiorów w sposób naturalny wprowadza relację równoliczności. Zbiór $X$ jest w relacji równolcziności ze zbiorem $Y$, co zapisujemy $X \sim Y$, jeżeli zbiory $X$ i $Y$ są równoliczne. Relacja równoliczności jest relacją równoważności. Posiada zatem własności: zwrotności (zbiór $X$ jest równoliczny ze samym sobą, co zapisujemy $X \sim X$), symetrii (jeżeli zbiór $X$ jest równoliczny ze zbiorem $Y$, to zbiór $Y$ jest równoliczny ze zbiorem $X$, co zapisujemy $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$), przechodniości (jeżeli zbiór $X$ jest równoliczny ze zbiorem $Y$ i zbiór $Y$ jest równoliczny ze zbiorem $Z$, to zbiór $X$ jest równoliczny ze zbiorem $Z$, co zapisujemy $(X \sim Y) \wedge (Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z$).

W przypadku zbiorów skończonych część właściwa zbioru posiada mniejszą liczbę elementów niż zbiór wyjściowy. Okazuje się, że dla zbiorów nieskończonych zbiór może być równoliczny ze swoim podzbiorem. W dalszych rozważaniach często korzystać będziemy z twierdzenia Cantora-Bernsteina.

**Twierdzenie 2 (Cantora-Bernsteina)** *Jeśli zbiór $X$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $Y$ oraz zbiór $Y$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $X$, to zbiory $X$ i $Y$ są równoliczne.*

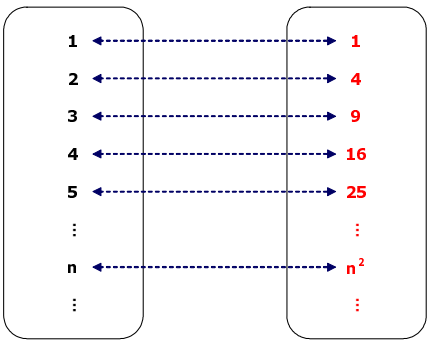
Twierdzenie 2 można zapisać za pomocą wzoru:

$$\Big(|X| \leqslant |Y|\Big) \wedge \Big(|Y| \leqslant |X|\Big) \Rightarrow |X| = |Y|$$

gdzie $|X| \leqslant |Y|$ oznacza, że zbiór $X$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $Y$.

### Liczby naturalne i kwadraty liczb naturalnych

Rozważmy zbiór liczb naturalnych oraz zbiór liczb kwadratowych (kwadratów liczb naturalnych).



Rysunek jasno przedstawia, że do każdej liczby naturalnej $n$ istnieje para $n^2$ w zbiorze kwadratów liczb naturalnych. Podobnie dla każdej liczby kwadratowej $m$ istnieje para $\sqrt{m}$ w zbiorze liczb naturalnych. Zatem zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem kwadratów liczb naturalnych, pomimo faktu, że kwadraty liczb naturalnych są częścią zbioru liczb naturalnych. Dość zaskakujący wniosek

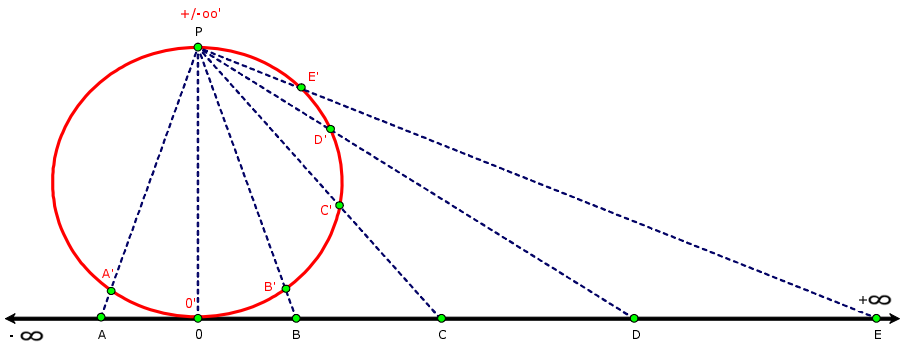
### Odcinki o różnych długościach

Niech będą dane dwa odcinki o różnych długościach. Naturalnie jeden z nich musi być krótszy.

Konstruujemy trójkąt prostokątny gdzie przyprostokątne to dwa analizowane odcinki. Ustalamy punkt na jednym z odcinków. Prowadząc przezeń prostą równoległą do przeciwprostokątnej trójkąta na drugim odcinku wyznaczamy parę w miejscu przecięcia się prostej z drugim odcinkiem. Tym samym każdy punkt z odcinka pierwszego posiada dokładnie jedną parę na odcinku drugim oraz każdy punkt z odcinku drugiego posiada dokładnie jedną parę na odcinku pierwszym. Wniosek - dowolne odcinki o skończonych długościach są zbiorami równolicznymi. Odpowiednie przekształcenie odcinka (np. nawinięcie na walec i sklejenie) może doprowadzić do powstania figury geometrycznej (np. okręgu). Nietrudno o kolejny wniosek, że odcinek jest równoliczny ze zbiorem punktów na okręgu. Dodatkowo każdy odcinek domknięty zawiera w sobie odcinek otwarty (bez dwóch krańcowych punktów), a każdy odcinek otwarty zawiera w sobie odcinek domknięty. Zatem na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina odcinek otwarty jest równoliczny z odcinkiem domkniętym.

### Prosta nieskończona i odcinek o skończonej długości

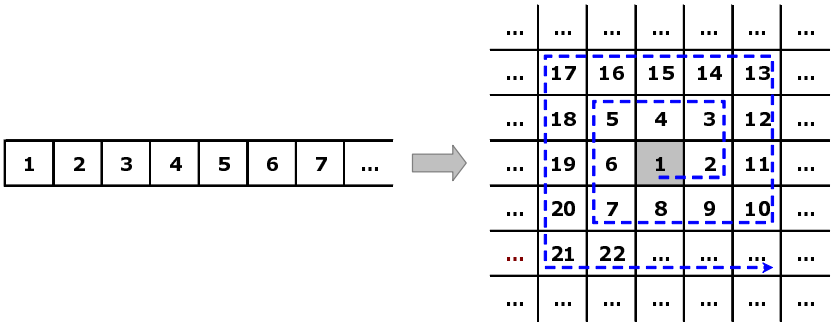
Wspomnieliśmy, że skończony odcinek jest równoliczny ze zbiorem punktów na okręgu. Rozważmy prostą nieskończoną oraz odcinek skończony (utożsamiony z okręgiem).



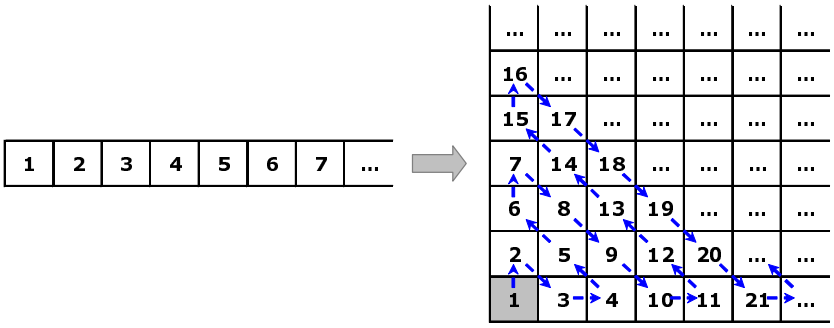

Niech prosta nieskończona będzie styczną do okręgu. Przez środek okręgu i punkt styczności prowadzimy prostą, która przetnie okrąg w dwóch punktach: w punkcie styczności oraz w punkcie oznaczonym na rysunku literą $P$. Ustalamy dowolny punkt na prostej nieskończonej. Prosta poprowadzona przez ten punkt oraz punkt $P$ przetnie okrąg w dwóch punktach: w punkcie $P$ oraz w punkcie, który wyznaczy parę na okręgu dla ustalonego punktu na prostej. Odwzorowanie jest wzajemnie jednoznacznej (odwracalne) jeżeli z okręgu usuniemy punkt $P$ (uczynimy go odcinkiem otwartym). Możemy mianowicie procedurę wykonać zaczynając od ustalenia punktu na okręgu. Wniosek: zbiór punktów na prostej nieskończonej jest równoliczny ze zbiorem punktów na okręgu bez jednego punktu, a tym samym jest równoliczny ze skończonym odcinkiem (otwartym lub domkniętym)! Kolejne zaskakujące stwierdzenie. Powyższe przekształcenie, nazywane *rzutem stereograficznym*, przedstawiliśmy w sekcji 4.3.3 niniejszego tekstu. W ogólnym przypadku odwzorowanie stereograficzne przekształca sferę na płaszczyznę.

### Iloczyny kartezjańskie

Rozważmy płaszczyznę nieograniczoną podzieloną na kwadraty np. o długości boku 1. Wybieramy dowolny kwadrat jako punkt startowy przydzielając mu numer 1. Kolejnym kwadratom przydzielamy numery zgodnie z regułą *spiralną* jak na załączonym niżej obrazku. W ten sposób cała płaszczyzna wypełnia się numerami dając uzasadnienie dla stwierdzenia, że równoliczne są zbiory liczb naturalnych oraz kwadratów na tak podzielonej płaszczyźnie.




Płaszczyznę można ograniczyć dwiema prostymi do „ćwiartki”. Tym razem jako kwadrat startowy z numerem 1 obieramy ten, który styka się z obiema ograniczającymi prostymi. Numerowanie pozostałych kwadratów przeprowadzamy zgodnie z zasadą *przekątniową*, co zostało pokazane na poniższym rysunku. Całość ograniczonej do ćwiartki płaszczyzny wypełnia się numerami uzasadniając wniosek, że równoliczne są zbiory liczb naturalnych i kwadratów na tak podzielonej ćwierci płaszczyzny.




Z własności przechodniości relacji równoliczności łatwo stwierdzamy, że zbiór kwadratów na nieograniczonej płaszczyźnie jest równoliczny ze zbiorem kwadratów na $\frac{1}{4}$ płaszczyzny.

### Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb wymiernych

Liczby wymierne dodatnie uzyskujemy jako wyniki ilorazów $\frac{m}{n}$ dowolnych dwóch liczb naturalnych $m$ i $n$. Przykładowo $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Zwracamy uwagę, że każdą liczbę wymierną możemy powyższą metodą uzyskać na wiele sposobów. Przykładowo $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots = \frac{k}{3k}$. Pisząc ogólnie $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ natychmiast pokazujemy, że wspomniana liczba sposobów otrzymania liczby wymiernej jest w istocie nieskończona. Niżej załączony obrazek prezentuje wpisanie liczb wymiernych w ograniczoną do ćwiartki płaszczyznę podzielną kwadratami o boku 1. Osie pionowa i poziom reprezentują

niezależne zbiory liczb naturalnych. W ten sposób każdy kwadrat może być utożsamiony z parą liczb naturalnych, a zatem i z liczbą wymierną. W takim przypisaniu pojawia się oczywiście nieskończenie wiele „duplikatów” liczb wymiernych, czego dobrym przykładem jest wartość 1 na całej długości diagonali (przekątnej).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | · |
| 7 | 7/1 | 7/2 | 7/3 | 7/4 | 7/5 | 7/6 | 7/7 | ... |
| 6 | 6/1 | 6/2 | 6/3 | 6/4 | 6/5 | 6/6 | 6/7 | ... |
| 5 | 5/1 | 5/2 | 5/3 | 5/4 | 5/5 | 5/6 | 5/7 | ... |
| 4 | 4/1 | 4/2 | 4/3 | 4/4 | 4/5 | 4/6 | 4/7 | ... |
| 3 | 3/1 | 3/2 | 3/3 | 3/4 | 3/5 | 3/6 | 3/7 | ... |
| 2 | 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | 2/5 | 2/6 | 2/7 | ... |
| 1 | 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | ... |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

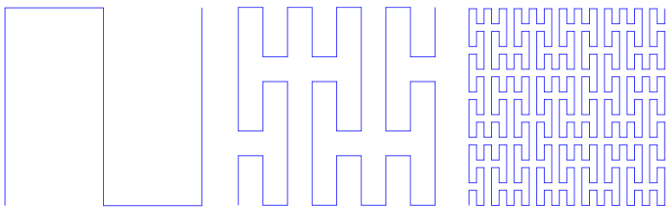
Liczby wymierne zawierają jako podzbiór liczby naturalne. Podobnie liczby wymierne reprezentowane przez tak podzielną ćwierćpłaszczyznę, co jest łatwe do spostrzeżenia w pierwszej kolumnie kwadratów. Zatem moc zbioru liczb wymiernych wraz z „duplikatami” nie może być mniejsza od mocy zbioru liczb naturalnych, podobnie jak moc zbioru liczb wymiernych czyli po usunięciu „duplikatów”. Jednak na podstawie wyników z poprzednich rozważań wiemy, że w tak przygotowanej płaszczyźnie kwadratów jest dokładnie tyle samo co liczb naturalnych. Czyli po usunięciu duplikatów otrzymamy zbiór liczb wymiernych równoliczny z częścią zbioru liczb naturalnych. Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina stwierdzamy, że liczb wymiernych jest dokładnie tyle samo co liczb naturalnych. Ponownie ciekawe spostrzeżenie!

### Odcinek i kwadrat

Dowodząc równoliczności punktów odcinka i kwadratu pokazujemy, że kwadrat posiada nie więcej punktów niż odcinek, czyli kwadrat jest równoliczny z pewnym podzbiorem odcinka. Dalej na podstawie spostrzeżenia, że kwadrat jako podzbiór zawiera odcinek stwierdzamy, że odcinek jest równoliczny z pewnym podzbiorem kwadratu. Twierdzenie Cantora-Bernsteina ostatecznie rozstrzyga problem - równoliczne są zbiory punktów w kwadracie i na odcinku.

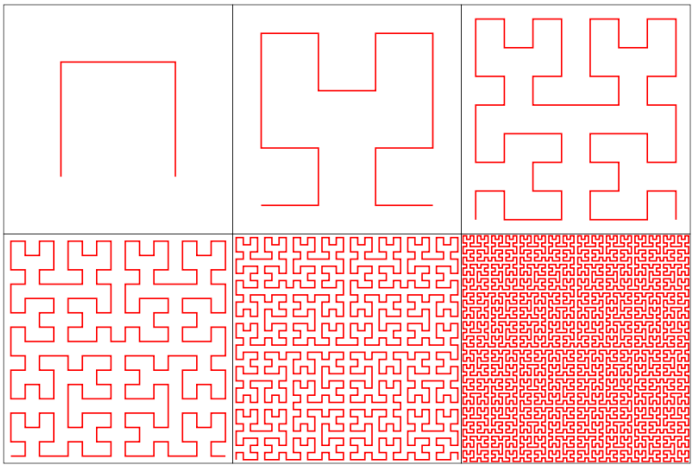
Pomijając szczegóły techniczne (reprezentację analityczną) przedstawimy dwie krzywe, które w sposób ciągły odwzorowują odcinek na kwadrat. Odwzorowania te nie muszą być różnowartościowe, najważniejsze, że są „na”, co oznacza, że każdy punkt na kwadracie ma co najmniej jedną parę w odcinku.

**Krzywa Peano** - w 1890 roku Giuseppe Peano[36] odkrył krzywą, która w sposób ciągły przekształca odcinek na kwadrat. Wynik ten wprowadził zamęt w rozumieniu ówczesnego pojęcia wymiaru. Krzywa, utożsamiana z odcinkiem jest jednowymiarowa, kwadrat z całą pewnością jest powierzchnią dwuwymiarową. Krzywą Peano otrzymuje się jako granicę ciągu krzywych, których konstrukcja przebiega jak na załączonym niżej obrazku (3 pierwsze kroki). W granicy krzywa Peano jest nieskończenie długa, jednak daje się rozwinąć do prostej nieskończonej, równolicznej z odcinkiem.



**Krzywa Hilberta** - w 1891 roku David Hilbert przedstawił kolejną krzywą przekształcającą w sposób ciągły odcinek na kwadrat. Ponownie krzywą Hilberta otrzymujemy jako granicę ciągu krzywych. Pierwszych 6 kroków przedstawia poniższy rysunek. Jako ciekawostkę podajemy, że długość krzywej w $n$-tym kroku wynosi $2^n - \frac{1}{2^n}$. Szybko zauważmy, że podobnie do krzywej Peano krzywa Hilberta również jest nieskończonej długości.

[36] Giuseppe Peano - (1858 - 1932) włoski matematyk i logik. Opracował stosowaną powszechnie aksjomatykę arytmetyki liczb naturalnych (tzw. aksjomaty Peano). Peano był również twórcą międzynarodowego sztucznego języka Latina sine flexione, będącego uproszczoną formą łaciny (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).



Odcinek jest równoliczny z prostą nieskończoną, kwadrat jest równoliczny z płaszczyzną nieograniczoną, z przechodniości relacji jasno wynika, że odcinek musi być równoliczny z całą płaszczyzną. Powyższą intuicję można rozszerzyć na większą liczbę wymiarów.

### 4.4.2 Istnieją różne nieskończoności

W sekcji 4.4.1 zapoznaliśmy się z pojęciem równoliczności. Wskazaliśmy, że zbiory nieskończone posiadają własność równoliczności ze swoją częścią, co wydało się być niepokojące. Choć przykładowo pozornie mamy jednych elementów dwa razy więcej niż drugich, to oba zbiory są w istocie nieskończone. Czy można mówić o tym, że któraś nieskończoność jest większa? Odpowiedź brzmi nie o ile wykażemy, że odpowiednie zbiory są równoliczne. Okazuje się bowiem, że istnieją różne typy nieskończoności, co przejawia się istnieniem zbiorów nieskończonych, które nie są w relacji równoliczności. Do takiego wniosku doszedł Georg Cantor udowadniając poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3 (Cantora)** *Moc każdego zbioru $A$ jest mniejsza od mocy zbioru $2^A$ jego podzbiorów.*

Twierdzenie 3 można zapisać jako nierówność

$$|A| < \left|2^A\right|$$

Konsekwencje twierdzenia Cantora są bardzo istotne. Rozważmy dowolny zbiór $A$ o nieskończonej liczbie elementów. Na mocy V aksjomatu teorii mnogości istnieje zbiór zawierający wszystkie jego podzbiory, tzn. zbiór potęgowy $2^A$. Twierdzenie Cantora jednoznacznie orzeka, że posiada on więcej

elementów niż zbiór wyjściowy, czyli wyznacza „nową” większą nieskończoność. Zbiór $2^A$ jest również zbiorem, więc ponownie na mocy V aksjomatu i twierdzenia Cantora istnieje bardziej liczny zbiór jego podzbiorów $2^{2^A}$. W ten oto sposób wyznaczamy kolejne coraz to większe typy nieskończoności.

$$|A| < \left|2^A\right| < \left|2^{2^A}\right| < \left|2^{2^{2^A}}\right| < \dots$$

Nie istnieje nieskończoność „największa”, ale najmniejsza już tak. Jest nią nieskończoność zbioru liczb naturalnych.

### Liczba kardynalna $\aleph_0$

Najmniejszą nieskończoną liczbą kardynalną jest liczba kardynalna $\aleph_0$ (alef[37] zero) odpowiadająca mocy zbioru liczb naturalnych. O liczbie $\aleph_0$ mówimy, że jest to *pierwsza nieskończona liczba kardynalna.* Zbiór $A$ równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych jest również mocy $\aleph_0$, co zapisujemy

$$|A| = \aleph_0$$

Takie zbiory nazywamy *przeliczalnymi.* Są to zbiory, których elementy możemy ponumerować właśnie liczbami naturalnymi (lub mówiąc inaczej ustawić w ciąg). Przykładowe zbiory przeliczalne to zbiory liczb naturalnych ($|\mathbb{N}| = \aleph_0$), liczb całkowitych ($|\mathbb{Z}| = \aleph_0$) oraz liczb wymiernych ($|\mathbb{Q}| = \aleph_0$).

### Liczba kardynalna $\mathfrak{c}$

Każdy zbiór $A$ równoliczny ze zbiorem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, nazywamy zbiorem *mocy continuum*, co zapisujemy

$$|A| = \mathfrak{c}$$

Jeżeli zbiór $A$, którego elementami są liczby rzeczywiste, zawiera przedział, to zbiór $A$ jest mocy continuum. Również zbiór punktów płaszczyzny (lub ogólniej przestrzeni) jest mocy continuum. Podobnie zbiór liczb niewymiernych jest mocy $\mathfrak{c}$.

**Twierdzenie 4** *Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest wyższej mocy niż zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, co zapisujemy*

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

[37] Alef - $\aleph$ pierwsza litera alfabetu hebrajskiego i fenickiego, odpowiadająca liczbie 1 (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

*lub*

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}$$

Twierdzenie podał jako pierwszy Georg Cantor. Dowód, który pomijamy, wykorzystuje rozumowanie przekątniowe[38]. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do literatury []. Powyższe twierdzenie mówi o tym, że nieskończoność liczb rzeczywistych jest „większa” niż nieskończoność liczb naturalnych (w sensie liczebności zbiorów).

### 4.4.3 Hipoteza continuun

*Hipoteza continuum* to hipoteza postawiona przez Cantora dotycząca mocy zbiorów liczb naturalnych i liczb rzeczywistych. Pojawiła się ona zupełnie naturalnie i jest dość prosto sformułowana. Jak wspomnieliśmy Cantor wykazał, że $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Powstało pytanie czy istnieje zbiór $A$ o mocy spełniającej warunek

$$\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$$

Mówiąc bardziej obrazowo czy istnieje zbiór $A$ nie będący w relacji równoliczności ze zbiorami liczb naturalnych i rzeczywistych, ale którego część jest równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych oraz który jest równoliczny z częścią zbioru liczb rzeczywistych? Problem okazał się być nietrywialny. Wielu wybitnych matematyków próbowało go rozwiązać, przez długie lata bez skutku. Kilka faktów związanych z hipotezą wykazał Wacław Sierpiński. Hipoteza continuum znalazła się na pierwszym miejscu listy najważniejszych nie rozwiązanych zagadnień, przedstawionej przez Hilberta w 1900 roku na Kongresie w Paryżu, które, jego zdaniem, miały wytyczyć drogę matematyki w XX wieku. Problem częściowo rozwiązano w 1940 roku. Kurt Gödel[39] udowodnił, że hipoteza continuum jest niesprzeczna z aksjomatami teorii mnogości. Wynik ten oznaczał, że nie można dać odpowiedzi negatywnej na pytanie zawarte w treści hipotezy. Ostateczne rozstrzygnięcie podał w 1963 roku Paul Cohen[40], dowodząc, że hipoteza continuum jest niezależna od systemu aksjomatów teorii mnogości, że można założyć jej prawdziwość lub fałszywość i to bez wpływu na obecne dokonania teorii mnogości. Rezultat Cohena wstrząsnął światem matematycznym. Cohen rozwiązał problem pomimo, że hipotezy nie obalił, ani nie udowodnił... Za to osiągnięcie został

[38]Rozumowanie przekątniowe - przykład rozumowania w dowodzie nie wprost.

[39]Kurt Gödel - (1906 - 1978) austriacki logik i matematyk; autor ważnych twierdzeń z zakresu logiki matematycznej (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

[40]Paul Cohen - (1934 - 2007) wybitny matematyk amerykański, laureat medalu Fieldsa w 1966 roku (źródło `http://pl.wikipedia.org/`).

uhonorowany w 1966 roku medalem Fieldsa - najbardziej prestiżową nagrodą przyznawaną w dziedzinie matematyki.

# Literatura

[1] Kazimierz Kuratowski: *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wydanie piąte, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972

[2] Wacław Sierpiński: *O teorii mnogości*, Monografie matematyczne, tom XVII, Warszawa 1951

[3] Stefan Banach: *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, wydanie drugie, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1969

[4] Witold Kołodziej: *Analiza matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978

[5] Antoni Miczko: *Wstęp do matematyki, teoria mocy*

[6] Wikipedia - wolna encyklopedia, `http://pl.wikipedia.org/`)

[7] Michał Stukow, *Zarys historyczny rozwoju pojęcia ciągłości*

[8] Mariusz Gromada, *Fraktale i samopodobieństwo*